کاربرد قانونها

چندین راه برای محاسبه ی احتمال خواسته شده وجود دارد. قرار دادن مسئله در قانون سوم (تئوری دو جمله ای) سریعترین روش است. اما این مسئله را می توان با ترکیبی از قوانین 1 و 2 نیز حل کرد. به صورتی که در اینجا گفته می شود: برای هر سکه احتمال رو آمدن (H) یا پشت آمدن (T) برابر است با :

H برای: $p = \frac{1}{2}$

T برای: $Q = 1 - p = \frac{1}{2}$

در انداختن سکه ممکن است یک رو و یک پشت به دو صورت بیاید:

- اول رو و بعد پشت یا
- اول پشت و بعد رو

در یک رشته $(HT$. یا $TH)$ احتمال ها مربوط به اتفاق های مستقل از هم هستند پس احتمال روی دادن هر یک از دو صورت را با استفاده از قانون ضرب بدست می آوریم:

(برای HT یا TH) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

این دو صورت نسبت به هم متقابلاً ناسازگارند پس احتمال آمدن یک صورت یا صورت دیگر از پدیده های متقابلاً مستقل را از قانون جمع محاسبه می کنیم :

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

بنابراین برای پدیده های نامرتب ما می توانیم احتمال را با ترکیب قوانین 1 و 2 محاسبه کنیم تئـوری دو جمله ای یک روش کوتاه تر را فراهم می کند.

برای استفاده از قانون سوم ما باید آن را به صورت زیر بیان کنیم:

اگر احتمال یک پدیده (X) برابر P و احتمال مکمل آن (Y) برابر q باشد احتمال رخ دادن s بار X و t بار Y در n آزمایش مستقل برابر است با

$$P=\frac{n!}{t!s!}p^{s}q^{t}$$

در معادله بـالا $n=s+t$ و $p+q=1$. علامـت $(!)$، مثـل $n!$، فاکتوریـل نامیـده مـی شـود مـثلاً n فاکتوریـل و برابـر اسـت بـا حاصـل ضـرب اعـداد صـحیح از n تـا یـک بـه عنـوان مثـال $7!=7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$؛ صفر فاکتوریل مانند هر عدد به توان صفر برابر یک است $(0!=n^{0}=1)$.

اکنون در انداختن دو سکه احتمال آمدن یک رو و یک پشت چقدر است؟

در این مورد $n=2$ و $s=t=1$ است و $p=q=\frac{1}{2}$ بنابراین

$$p=\frac{2!}{1!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}=\frac{1}{2}$$

این جواب مسئله همان جواب اول ماست.

اکنون یک مسئله که بیشتر به ژنتیک مربوط باشد طرح می کنیم، احتمال اینکه یک خانواده که شش

فرزند دارد دقیقاً 5 دختر و یک پسر داشته باشد چقدر است؟ (ما فرض می کنیم که احتمال دختر یا پسر بودن یک فرزند برابر $\frac{1}{2}$ باشد) از آنجایی که ترتیب بچه ها مشخص نیست از قانون 3 استفاده می کنیم:

$$p = \frac{6!}{5!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 6\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$$

اگر ما فقط احتمال یک ترتیب خاص را بخواهیم که در آن چهار دختر به دنیا بیایند بعد یک پسر و بعد یک دختر به دنیا می آیند چه می شود؟ در این جا برای یک رشته شامل شش اتفاق مستقل قانون 2 را به کار می گیریم:

$$p = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{64}$$

هنگامی که ترتیبی مشخص نشده است احتمال شش برابر حالتی است که ترتیب مشخص مورد نظر است دلیل آن به سادگی مشخص است : شش روش یا ترتیب برای داشتن پنج دختر و یک پسر وجود دارد و رشته ی 4-1-1 فقط یکی از آن هاست. قانون 3 به ما می گوید که 6 راه وجود دارد که اگر B را نشان دهنده ی پسر و G را نشان دهنده دختر بگیریم این راه به صورت های زیر می باشند

ترتیب تولد

1	2	3	4	5	6
B	G	G	G	G	G
G	B	G	G	G	G

$G \quad G \quad B \quad G \quad G \quad G$

$G \quad G \quad G \quad B \quad G \quad G$

$G \quad G \quad G \quad G \quad B \quad G$

$G \quad G \quad G \quad G \quad G \quad B$

اگر دو فرد که از لحاظ آلبینیسم (یک صفت مغلوب) هتروز یگوت هستند چهار فرزند داشته باشند با چه احتمالی هر چهار تا می توانند عادی باشند؟ جواب با استفاده از قانون 2 برابر است با $\left(\frac{3}{4}\right)^4$. احتمال اینکه سه تا عادی باشند و یکی آلبینو چقدر است؟ اگر ما یک ترتیب از فرزندان را مشخص کنیم احتمال $\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^1$ خواهد بود ولی اگر ترتیب خاصی را در نظر نگیریم داریم:

$$P = \frac{4!}{3!1!}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^1 = 4\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^1$$

این دقیقاً 4 برابر احتمال یک ترتیب خاص است چون فرزند آلبینو می تواند اولین، دومین، سومین یا آخرین فرزند باشد.

فرمول قانون 3 فرمول ضرایب برای جملات یک بسط دو جمله ای است یعنی اگر $(p+q)^n$ بسط داده شود فرمول $\frac{n!}{t!s!}q^t p^s$ احتمال هر یک از این جمله ها را می دهد (که در آن $n = s+t$ و $p+q=1$) از آن جایی که $n+1$ جمله در این بسط وجود دارد این فرمول احتمال جمله ی $(t+1)$ ام را می دهد. دو نتیجه ای کارآمد از این یادآوری که قانون 3 در واقع جمله های یک بسط دو جمله ای است بدست می آید اول اینکه

اگر در محاسبه ی ضریب جمله مشکل داشتید می توانید از مثلث خیام – پاسکال استفاده کنید :

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

مثلث خیام پاسکال یک آرایه ی مثلثی شکل تشکیل شده از ضرایب بسط دو جمله ایست و بـه ایـن صورت بدست می آید که هر سطر را با یک 1 آغاز می کنیم و بقیه ی اعداد سطر را از جمع دو عـدد مجـاور سطر بالا بدست می آوریم و در آخر هر سطر هم یک 1 قرار می دهیم به عنوان مثال سطر بعد به این صـورت خواهد بود

1 و (1+5) و (5+10) و (10+10) و (10+5) و (5+1) و 1

1 و 6 و 15 و 20 و 15 و 6 و 1 یا

این اعداد ضرایب هر جمله که ترکیبی از $p^s q^t$ است را می دهند.

در مثال قبلی ما $n=4$ است پس $(n+1)$ یا پنجمین سطر از مثلث خیام پاسکال را مورد استفاده قرار می دهیم (دومین عدد از هر سطر برابر توان بسط یا همان n است که در این جا 4 دومین عدد این سطر است

) ما به دنبال حالتی هستیم که یک فرزند آلبینو در خانواده ای با چهار فرزند وجود داشته باشـد، یـا p^3q^1 ،

هرگاه p احتمال وجود یک فرزند سالم $\frac{3}{4}$ و q احتمال وجود یک فرزند آلبینو $\frac{1}{4}$ باشد.

با توجه به توان $q(t)$ ضریب این جمله عدد $(t+1)$ ام یا $(1+1)$ ام از سطر پنجم مثلث خیام پاسـکال

است که به ما تعداد راه های وجود یک خانواده با چهار فرزند که یکی آلبینو باشد را نشان می دهد این عدد 4

است پس با استفاده از مثلث خیام پاسکال می بینیم که حل این مسئله برابر است با:

$$4\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^1$$

این همان جوابی است که با استفاده از فرمول قانون 3 بدست آوردیم.

امتیاز دیگر دانستن این موضوع که قانون 3 همان فرمول بسط دو جمله ایست این است که می توانیم

آن را به بیش از دو پدیده تعمیم دهیم فرمول عمومی بسط چند جمله ای $(p+q+r+...)^n$ و فرمول عمومی

احتمال به صورت زیر است:

$$p=\frac{n!}{s!t!u!...}p^sq^tr^u...$$

که در آن $s+t+u+...=n$ و $p+q+r+...=1$.

اگر یک خانواده با 5 فرزند داشته باشیم چقدر احتمال دارد دو پسر سالم و دو دختر سالم و یک پـسر

آلبینو در این خانواده باشد؟ (دختر آلبینود در این خانواده وجود نخواهد داشت)

با استفاده از قانون 2 :

احتمال یک پسر سالم $=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

احتمال دختر سالم $=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

احتمال پسر آلبینو $=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

احتمال دختر آلبینو $=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

پس :

$$p=\frac{5!}{2!2!1!0!}\left(\frac{3}{8}\right)^2\left(\frac{3}{8}\right)^2\left(\frac{1}{8}\right)^1\left(\frac{1}{8}\right)^0=30\left(\frac{3}{8}\right)^4\left(\frac{1}{8}\right)^1=30\frac{3^4}{8^5}=\frac{2430}{32768}=0/074$$