

استقرا

مقدمه:

برای درک مفهوم استقرا به مراحل اثبات یکی از برابری‌های ساده در ریاضیات توجه کنید:

مجموع اعداد طبیعی زیر را در نظر بگیرید:

$$1 = 1$$

$$1 + 2 = 3$$

$$1 + 2 + 3 = 6$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

اگر به طور که بخواهیم $1 + 2 + 3 + \dots + n$ را بدست بیاوریم یک راه این است که الگویی از

مجموع اعداد بالا بدست آورده و سعی در اثبات آن نمائیم.

$$1 = \frac{1 \times 2}{2}$$

$$1 + 2 = \frac{2 \times 3}{2}$$

$$1 + 2 + 3 = \frac{3 \times 4}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4 \times 5}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5 \times 6}{2}$$

و به این ترتیب الگوی $1 + 2 + 3 + \dots + m = \frac{m(m+1)}{2}$ را برای مجموعه فوق در نظر می‌گیریم.

این الگو در حقیقت یک گزاره بر روی اعداد طبیعی می‌باشد که می‌توان آن را با $p(n)$ به معنی

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

اگر چه اثبات این الگو به طور مستقیم و بدون کمک به استقرا به سادگی ممکن می‌باشد ولی در حل

مسائل ریاضی به دفعات به حدس‌هایی برمی‌خوریم که اثبات آنها می‌تواند مشکل باشد در ایده استقرا یکی از زیباترین ایده‌های موجود برای کمک به ما می‌باشد.

برای آنکه بیشتر آمادگی ذهنی برای درک استقرا پیدا کنیم به همان مثال مجموع اعداد 1 تا n

می‌رویم، و می‌خواهیم گزاره $p(n)$ را که گزاره‌ای درباره عدد n می‌باشد ثابت کنیم.

در ایده استقرا که جلوتر به تعریف دقیق آن می‌پردازیم نخست باید برای n ‌های کوچک درستی $p(n)$

را نشان دهیم مانند:

$$p(1): 1 = \frac{1 \times 2}{2}$$

$$p(2): 1 + 2 = \frac{2 \times 3}{2}$$

حال می‌دانیم لافل برای تعدادی از ابتدای اعداد طبیعی $p(n)$ درست است. اکنون با فرض آنکه برای

$p(k)$ حکم درست باشد، درستی $p(k+1)$ را نتیجه می‌گیریم (دقت کنید درستی $p(k)$ را فرض می‌کنیم).

$$p(k): 1+2+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$p(k+1): 1+2+3+\dots+k+k+1 = (1+2+3+\dots+k) + k+1$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + k+1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

خوب حال شما بگوئید ما برای چند عدد طبیعی کوچکترین درستی $p(n)$ را ثابت کرده و با فرض

درستی $p(k)$ درستی $p(k+1)$ را ثابت کردیم، با این حساب آیا می توان گفت که $p(n)$ برای تمامی اعداد

طبیعی برقرار است؟!

به موضوع بالا فکر کنید چون اگر چه بعداً توضیح داده می شود ولی اگر اکنون آن را برای خود تجزیه

و تحلیل کنید برای درک مطالب آینده راحت تر خواهید بود.

چند نماد پر کاربرد:

نماد مجموع (\sum): از این جا به بعد با مجموع پشت سرهم دنباله ای از اعداد سروکار خواهیم داشت.

برای نشان دادن مجموع $1+2+\dots+n$ از نماد $\sum_{j=1}^n j$ استفاده می کنیم، و این نماد یعنی تابع j از حداقل

مقدار 1 شروع شده و تا حداکثر n می رود و حاصل تمام مقادیر با هم جمع می شود. به طور کلی چند نمونه

پر کاربرد:

$$1+2+\dots+i$$

$$\sum_{i=1}^n i \text{ به جای}$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + i^2 \quad \text{به جای } \sum_{i=1}^n i^2$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + i^3 \quad \text{به جای } \sum_{i=1}^n i^3$$

و به همین ترتیب ...

و به طور کلی

$$p(1) + p(2) + \dots + p(n) \quad \text{به جای } \sum_{j=1}^n p(j)$$

استفاده می شود.

دقت کنید در نماد \sum که آن را سیگما بخوانید سه قسمت مهم وجود دارد که در شکل قبل نشان داده

شده است.

قضیه . می توان سیگمای مجموع دو تابع یعنی $\sum_{i=1}^n (A(i) + B(i))$ را به صورت مجموع دو سیگما هر

یک از توابع یعنی $\sum_{i=1}^n A(i) + \sum_{i=1}^n B(i)$ نوشت.

قضیه . $\sum_{i=1}^n k \times p(i) = k \sum_{i=1}^n p(i)$ که k عددی ثابت است.

دو قضیه بالا به راحتی قابل اثبات بوده و از اثبات آنها صرف نظر می کنیم.

نماد حاصل ضرب (\prod) :

به طریق مشابه برای حاصل ضرب $p(1) \times p(2) \times \mathbf{L} \times p(n)$ داریم:

$$\prod_{i=1}^n p(i) = p(1) \times p(2) \times \mathbf{L} \times p(n)$$

به عنوان نمونه:

$$(1^2 + 3) \times (2^2 + 3) \times (3^2 + 3) \times \mathbf{L} \times (n^2 + 3) \quad \text{به جای } \prod_{i=1}^n (i^2 + 3)$$

$$(1+5) \times (2+5) \times (3+5) \times (4+5) \times (5+5) \quad \text{به جای } \prod_{i=1}^5 (i+5)$$

