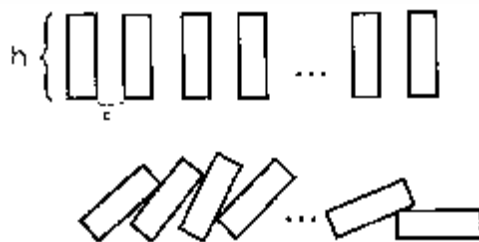


اصل استقرای ریاضی:

یک ردیف از آجرهایی را در نظر بگیرید که روی انتهایشان به صورت عمودی ایستاده اند و فاصله ی

بین آجرها به قدری کم است که اگر یکی از آن ها بیفتد، آجر بعدی هم خواهد افتاد...



این مثال از آجرها، استقرای ریاضی را - که یکی از مهم ترین ابزارهای ریاضیات گسسته است -

توصیف میکند. استقرای ریاضی موقعی استفاده میشود که ما یک دنباله از جملات نامتناهی داریم،

$$p(1), p(2), \dots, p(n), p(n+1), \dots$$

و ما میخواهیم ثابت کنیم که همه ی آن جملات درست (برقرار) هستند. در واقع جملات همان

آجرها و درستی جملات همان به زمین افتادن آجرهاست. اگر ما بتوانیم ثابت کنیم که درستی هر جمله ی

$P(n)$ درستی جمله ی $P(n+1)$ را نتیجه می دهد (نشان دهیم که فاصله ی بین آجرها به قدری کم است

که افتادن یک آجر، باعث افتادن آجر بعدی خواهد شد. هم چنین اگر بتوانیم نشان دهیم که جمله ی

$P(1)$ صحیح است، - آجر اولی به زمین می افتد، آن گاه ثابت کرده ایم که همه ی جملات برقرار هستند.

(همه ی آجرها خواهند افتاد.)

اصل استقرای ریاضی یکی از قدرتمندترین ابزارها و تکنیک های حل مسئله است . این اصل به شکل زیر کار می کند.

فرض کنید T قضیه ای باشد که می خواهیم ثابت کنیم. همچنین فرض کنید T شامل یک پارامتر n است که n یک عدد طبیعی می باشد. به جای این که مستقیما درستی T را به ازای تمام مقادیر n ثابت کنیم؛ ما دو شرط زیر را اثبات می کنیم.

T به ازای $n = 1$ برقرار است.

به ازای هر $n > 1$ ، از برقراری T به ازای $n - 1$ ، برقراری T را به ازای n ، نتیجه می گیریم.

برقراری شرط 1 و 2، برای برقراری T به ازای تمام مقادیر T کافی است. شرط 1 و 2، برقراری T به

ازای $n = 2$ را نتیجه می دهند. برقراری T به ازای $n = 2$ و شرط 2، برقراری T به ازای $n = 3$ را

نتیجه می دهند و درحقیقت برای این که ثابت کنیم، جمله $P(k)$ درست است ابتدا ثابت می کنیم

که جمله $P(1)$ درست است و از درستی جمله $P(1)$ درستی جمله $P(2)$ را نتیجه می گیریم و از

درستی جمله $P(2)$ درستی جمله $P(3)$ را نتیجه می گیریم و ... و سپس از درستی جمله $P(k-1)$

درستی جمله $P(k)$ را نتیجه می گیریم. به این صورت به ازای هر $k \geq 1$ ، می توانیم ثابت کنیم که

جمله $P(k)$ درست است.

تحقیق درستی شرط 1، معمولا ساده است. ولی به هر حال باید درستی آن را چک کرد. و

همچنین تحقیق درستی شرط 2، معمولا از اثبات مساله به طور مستقیم ساده تر است. و وقتی که این دو

شرط را ثابت کردیم، طبق اصل استقرای ریاضی مساله را برای بینهایت مقدار، اثبات کرده ایم.