تعمیم اولیه اصل استقرا

استقرای ضعیف

اصل استقرای ریاضی ضعیف : اگر m یک عدد صحیح و $P(n)$ یک جمله بر اساس پارامتر n باشد، به طوری که:

الف. $P(m)$ برقرار باشد.

ب. به ازای هر $n > m$، $P(n-1) \Rightarrow P(n)$.

در این صورت، به ازای هر $n \geq m$، $P(n)$ برقرار است.

اثبات . فرض کنید که چنین نباشد، یعنی حکم برای برخی مقادیر صحیح $n \geq m$ صحیح نباشد.

در این صورت طبق اصل خوش ترتیبی، عددی مثل p وجود دارد به طوری که:

1. حکم به ازای $n = p$ برقرار نباشد.
2. برای تمام مقادیر $m \leq n < p$، حکم برقرار باشد.

به عبارت دیگر p اولین عدد صحیح بزرگ تر یا مساوی n باشد که به ازای آن، حکم مفروض نیست.

واضح است که $p > m$ است، زیرا به ازای $n = m$ طبق شرط الف، حکم صحیح است. بنابراین $p-1$ یک عدد صحیح بزرگ تر یا مساوی m است. از اینجا نتیجه می شود که برای عدد صحیح بعد از آن برقرار نیست و این با فرض ب، متناقض است.

$P(m)$ را پایه استقرا و $P(n-1)$ را فرض استقرا و $P(n)$ را حکم استقرا مـی گـوییم. بنـابراین برای اثبات یک مساله با استقرا، ابتدا باید درستی پایه استقرا را ثابت کنیم. سپس، با فرض درستی فرض استقرا، درستی حکم استقرا را نتیجه بگیریم. اگر هر کدام از دو گام فوق را انجام ندهیم، مساله ما ثابـت نمی شود.

حال بهتر است به بررسی چند مثال بپردازیم.

مثال . به ازای هر $n \in$ ، ثابت کنید:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

حل. قدم اول در استفاده از استقرا بررسی درستی پایه ی استقرا است. پس باید بررسی کنیم که آیا $1 = \frac{1\times 2}{2}$ ؟ می بینیم که پایه ی استقرا برقرار است.

قدم دوم باید فرض کنید که $P(n)$ درست است یعنی:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

و از درستی آن، درستی $P(n+1)$ را نتیجه بگیریم؛ یعنی:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

طبق فرض استقرا داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

بنابراین، با اضافه کردن $n+1$ به طرفین تساوی داریم:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

پس اثبات مساله کامل شد.

مثال . نامساوی برنولی : به ازای هر عدد صحیح $n \geq 0$ و هر عدد حقیقی $x \geq -1$ ثابت کنید:

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

حل . برقراری پایه ی استقرا :

$$(1+x)^0 \geq 1+0x \quad \text{یا} \quad 1 \geq 1$$

طبق فرض استقرا داریم:

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

حال با توجه به این که $1+x \geq 0$ داریم:

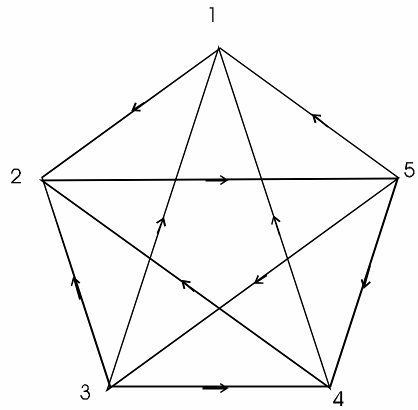
$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) \\ &\geq 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x\end{aligned}$$

پس حکم استقرا ثابت شد و اثبات به پایان می رسد.

دقت کنید که اگر شرط $1+x \geq 0$ را نداشتیم، نمی توانستیم طرفین را در $1 + x$ ضرب کنیم و علامت نامساوی تغییر نکند. به این مسایل دقت داشته باشید، چون می تواند باعث خطا در اثبات شود؛ به خطاهای استقرا در بخش های بعدی خواهیم پرداخت.

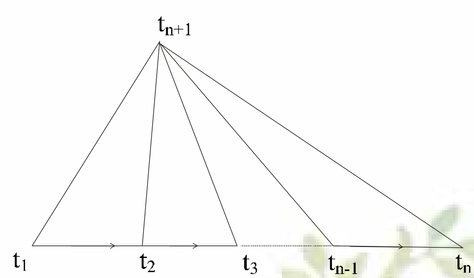
مثال. فرض کنید n تیم در یک تورنمنت (هر تیم با هر یک از $n-1$ تیم دیگر دقیقاً یک بار بازی کرده است) با یکدیگر بازی کرده اند. اگر هیچ دو تیمی مساوی نکرده باشند ثابت کنید دنباله

$t_1, t_2, ..., t_n$ از تیم ها وجود دارد به طوری که، تیم t_1 از تیم t_2 برده، تیم t_2 از تیم t_3 برده، ... و تیم t_{n-1} از تیم t_n برده است.



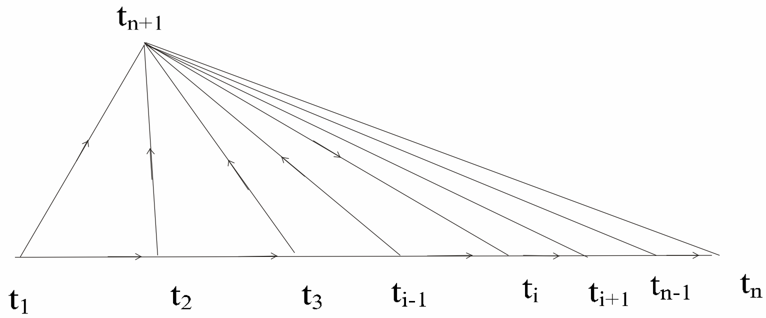
به عنوان مثال شکل بالا یک تورنمنت 5 رأسی را نشان می دهد که در آن تیم 5 از تیم 3، تیم 3 از تیم 4، تیم 4 از تیم 2 و تیم 2 از تیم 1 برده است.

حل . پایه ی استقرا : در یک تورنمنت $n = 1$ تیمی، دنباله ی t_1 (تنها تیم شرکت کننده) جواب است.



حال فرض کنید برای هر تورنمنت با n تیم، چنین دنباله ای وجود دارد. می خواهیم ثابت کنیم برای هر تورنمنت $n + 1$ تیمی نیز، چنین دنباله ای وجود دارد. یکی از $n + 1$ تیم مثلاً تیم t_{n+1} را در

نظر نگیرید. با در نظر گرفتن بازی بین n تیم باقی مانده، ما یک تورنمنت n تیمی داریم و طبق فرض استقرا، دنباله ی $t_1, t_2, \ldots, t_n$ از این n تیم وجود دارد که تیم t_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ از تیم t_{i+1} برده است.



اگر تیم t_{n+1} به تیم t_n باخته باشد، دنباله ی $t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1}$ جواب مساله است. همچنین اگر تیم t_{n+1} تیم t_1 را برده باشد، دنباله ی $t_{n+1}, t_1, t_2, \ldots, t_n$ جواب مساله است. در غیر این حالات فرض کنید تیم t_i اولین تیمی (کوچک ترین i ای) باشد که به t_{n+1} باخته است. چنین تیمی وجود دارد زیرا تیم t_{n+1} حداقل یک برد از تیم t_n دارد. پس تیم t_{i-1}، t_{n+1} را برده و تیم t_{n+1} هم t_i را برده است. پس دنباله ی $t_1, t_2, \ldots, t_{i-1}, t_{n+1}, t_i, \ldots, t_n$ جواب مساله است.

مثال. n عدد مثبت و متمایز $a_1, a_2, \ldots, a_n$ مفروض اند. اگر $e_i = 0,1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ باشد. ثابت کنید از بین 2^n مقداری که $e_1a_1 + e_2a_2 + \ldots + e_na_n$، می تواند بگیرد، حداقل $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ عدد متمایز پیدا می شود.

حل . بدون این که به کلیت مساله لطمه بخورد فرض کنید $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. با استقرا روی n ثابت می کنیم که لااقل $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ تعداد از جملات فوق متمایز هستند.

برای پایه ی استقرا $(n = 1)$ که حکم برقرار است. $0, a_1$ دو جمله ی مورد نظر است.

حال حکم را به ازای $n = k$ درست فرض کنید؛ می خواهیم درستی آن را بـه ازای $n = k + 1$ اثبات کنیم. با اعداد $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_k$، حداقل $\frac{k(k+1)}{2} + 1$ جمله ی متمایز ساخته می شود. باید $\frac{(k+1)(k+2)}{2} + 1 - \left(\frac{k(k+1)}{2} + 1\right) = k + 1$ جمله ی دیگر بسازیم. این $k + 1$ جمله را به روش زیـر می سازیم.

فرض کنید $S = \sum_{i=1}^{k} a_i$. (در نتیجه S بزرگتر یا مساوی تمام جملات قبلی است.) حال ادعا مـی کنیم که

$$S + a_{k+1} > S + a_{k+1} - a_1 > S + a_{k+1} - a_2 > \ldots > S + a_{k+1} - a_k$$

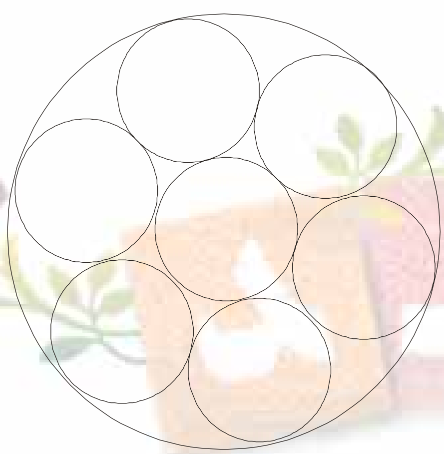
$k + 1$ جمله ی متمایز هستند و هر کدام از سایر جملات قبلی بزرگتر می باشد زیرا اگر A یکی از $\frac{k(k+1)}{2} + 1$ جمله ی ساخته شده ی قبلی باشد، $S \geq A$ ولی $S + a_{k+1} - a_k > S$ می باشد. پس حکم اثبات شد.

مثال. در یک مدرسه n دبیر تدریس می کنند. این دبیرها را با شماره های **1** تا n شـماره گـذاری می کنیم. می دانیم که دبیر i ام، $i + 1$ نفر از دانش آموزان را می شناسد. هر دانش آموز می تواند توسط بیش از یک دبیر شناخته شود. هر یک از این دبیرها می خواهد یکی از دانش آموزانی را که می شناسـد به عنوان نماینده ی خود برگزیند به شرط این که هیچ دانش آموزی به عنوان نماینده ی بیش از یک دبیر انتخاب نشود. ثابت کنید که انتخاب این نماینده ها حداقل به 2^n حالت مختلف امکان پذیر است.

حل . باز مساله را با استقرا روی تعداد دبیرها حل می کنیم. برای $n = 1$، حکم بدیهی است. اگر برای n دبیر، حداقل 2^n حالت وجود داشته باشد، می خواهیم ثابت کنیم برای $n + 1$ دبیر هم، حداقل 2^{n+1} حالت وجود دارد. طبق فرض استقرا دبیرهای اول تا n ام به 2^n طریق می توانند نماینده های خود را انتخاب کنند؛ و چون دبیر $n + 1$ ام حداقل $n + 2$ نفر را می شناسد که حداکثر n نفر از آنها قبلاً به عنوان نماینده انتخاب شده اند، پس دبیر $n + 1$ ام - در هر کدام از 2^n حالت- حداقل به 2 طریق می تواند نماینده ی خود را انتخاب کند. بنابراین $n + 1$ دبیر حداقل به $2\times2^n = 2^{n+1}$ طریق می توانند نماینده های خود را انتخاب کنند.

مثال. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n می توان 7^n دایره به شعاع واحد را درون یک دایره به شعاع 3^n جا داد به طوری که هیچ دو دایره ای متقاطع نباشند (هر دو دایره حداکثر در یک نقطه می توانند با هم اشتراک داشته باشند).

حل . با استقرا روی n ثابت می کنیم که 7^n دایره به شعاع واحد را می توان درون یک دایره به شعاع 3^n جا داد. برای $n = 1$، دایره ها را به صورتی که در شکل نشان داده شده است قرار می دهیم.



حال فرض کنید که حکم برای $n = m$ درست باشد، می خواهیم حکم را برای $n = m + 1$ ثابت کنیم. ابتدا درون دایره ای به شعاع 3^{m+1}، مانند حالت $n = 1$، 7 دایره به شعاع 3^m رسم می کنیم. حال طبق فرض استقرا می توان دورن هر یک از این 7 دایره، 7^m دایره به شعاع واحد رسم کرد. چون هیچ کدام از 7 دایره ی به شعاع 3^m، بیش از یک نقطه ی تلاقی ندارند، بنابراین توانستیم درون یک دایره به شعاع 3^{m+1} ، $7\times7^m = 7^{m+1}$ دایره به شعاع واحد رسم کنیم که هیچ دو دایـره ای در بـیش از یـک نقطه با یکدیگر تقاطع نداشته باشند. پس حکم ثابت شد.

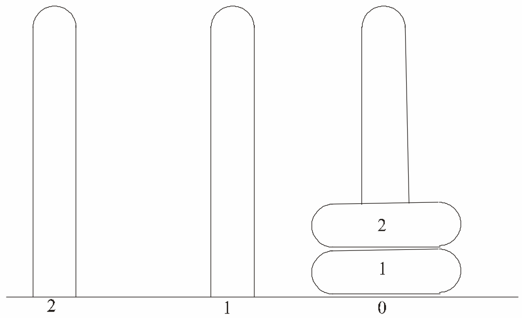
مثال. A و B دو مجموعه ی متناهی و جدا از هم از عددهای صحیح هستند به طـوری کـه بـرای هر $x\in A\cup B$، $x+1\in A$ یا $x-2\in B$ است. ثابت کنید که تعداد عناصر مجموعه ی A دو برابر تعداد عناصر مجموعه ی B است.

اثبات. از استقرا روی تعداد عناصر B استفاده می کنیم. اگر تعداد عناصر B صفر باشـد، یعنـی B تهی باشد، نشان می دهیم که A نیز تهی است. چون برای هر عنصر $x\in A$، $x\in A\cup B$ نیز می باشد، در نتیجه طبق فرض مسئله باید $x+1\in A$ باشد. بنابراین اگر A تهی نباشد، بایـد نامتنـاهی باشـد و ایـن برخلاف فرض مساله است.

حالا فرض کنید که مسئله برای $|B|=n-1$ ثابت شده باشد، حال آن را برای $|B|=n$ ثابـت مـی کنیم. برای این منظور کوچک ترین عضو B را در نظر گرفته و آن را y می نامیم. چـون y کوچـک تـرین عضو B است، پس $y-2\notin B$؛ در نتیجه $y+1\in A$ است. در نتیجه چون $y+1\in A$ و $y-1\notin B$ (زیرا y کوچک ترین عضو B است). بنابراین $y+2\in A$. چون مجموعه هـای A و B جـدا از هـم مـی باشـند، بنابراین $y\notin A$ و $y+1, y+2\notin B$.

حـال مجموعــه هــای $A' = A - \{y+1, y+2\}$ و $B' = B - \{y\}$ را در نظـر بگیریــد. بــه ازای هر $x \in A' \cup B'$، داریم $x+1 \in A'$ یا $x-2 \in B'$. زیرا اگر $x \in A' \cup B'$ باشد، آن گاه $x \in A \cup B$ است و طبق فرض مساله $x+1 \in A$ یا $x-2 \in B$ می باشد. اگـر مـثلاً $x+1 \in A$ باشــد، بـا توجـه بـه ایـن که $x \neq y, y+1, y+2$ (چرا؟)، پس $x+1 \in A'$. به طریق مشابه اگر $x-2 \in B$ باشد، با توجــه بــه ایـن که $x \neq y, y+1, y+2$، پس باید $x-2 \in B'$ باشد. از طرف دیگر واضح است که چون مجموعه هــای A و B جدا از هم می باشند، پس مجموعه های A' و B' هم جدا از هم می باشند. پس مجموعــه هــای A' و B' دارای شرایط مساله هستند و $|B'| = n-1$، پس طبق فرض استقرا $|A'| = 2|B'|$. ولی $|A| = |A'| + 2$ و $|B| = |B'| + 1$ پس $|A| = 2|B|$.

مثال. تعداد 2^k دیسک داریم که روی هر کدام، یکی از عددهای 1 تا 2^k نوشته شده است. $k+2$ میله با شماره های صفر تا $k+1$ در یک ردیف پشت سر هم قرار گرفته اند. در ابتدا، دیسک ها بـا یــک ترتیب داده شده در میله ی صفر روی هم قرار دارند. در هر حرکت می توان بالاترین دیسک موجود روی میله ی i را برداشته و روی میله ی $i+1$ ام قرار داد ($0 \le i \le k$). این حرکت را با T_i نمایش می دهــیم. حالت نهایی مرتب، حالتی است که در آن تمام دیسک ها به ترتیب از شماره ی **1** تا 2^k (پایین بــه بــالا) روی میله ی شماره ی $k+1$ ام قرار گرفته باشند. برای مثال، بــه ازای $k=1$، حرکـت هــای لازم بــرای رسیدن به حالت نهایی مرتب از حالت اولیه ای به شکل زیر می تواند به صورت (T_0, T_0, T_1, T_1) باشد.



ثابت کنید به ازای هر k می توان از هر ترتیب اولیه ی دیسک ها روی میله ی شماره ی صفر به یک حالت نهایی مرتب رسید.

حل . اگر $k = 0$ باشد که حکم بدیهی است. حال فرض کنید مسئله برای $k = m$ حل شده باشد؛ درستی آن را برای $k = m + 1$ ثابت می کنیم. حال $m + 3$ میله و 2^{m+1} مهره داریم. اگر مهره های شماره ی $2^m + 1$ تا 2^{m+1} وجود نداشتند، می توانستیم مهره های شماره ی 1 تا 2^m را بدون استفاده از میله ی شماره ی 1 به میله ی شماره $m + 2$ منتقل کنیم. ولی این مشکل را می توان به این صورت حل کرد که هر گاه نوبت حرکت یک مهره با شماره ی 1 تا 2^m شد و مهره یا مهره هایی با شماره ی $2^m + 1$ تا 2^{m+1} بالاتر از آن روی میله ی شماره ی صفر قرار داشت، آن مهره ها را به میله ی شماره ی یک منتقل می کنیم و بعد حرکت مورد نظر را انجام می دهیم. توجه کنید که در حرکات مورد نظر، حرکت T_i به حرکت T_{i+1} $(i \geq 1)$ و حرکت T_0 به حرکت های لازم T_0 برای انتقال مهره های با شماره ی $2^m + 1$ تا 2^{m+1} و سپس حرکت T_0 به T_1 تبدیل شده است.

حال مهره های با شماره ی 1 تا 2^m با ترتیب پایین به بالا روی میله ی شماره ی $m + 2$ قرار گرفته اند. حال 2^m دیسک با شماره های $2^m + 1$ تا 2^{m+1} راکه روی میله ی شماره ی یک قرار گرفته

اند، طبق فرض استقرا به میله ی شماره ی $m+2$ منتقل می کنیم. بنابراین دیسک ها از شماره ی 1

تا 2^{m+1} به ترتیب (از پایین به بالا) روی میله ی شماره ی $m+2$ قرار گرفته اند و حکم ثابت شد.

استقرای چند پایه

اگر m یک عددی صحیح، k یک عدد طبیعی و $P(n)$ یک جمله بر اساس پارا متر n باشد، به طوریکه:

الف. $P(m), P(m+1), P(m+2),\ldots, P(m+k-1)$ برقرار باشد.

ب. به ازای هر $n \ge m+k$ بتوانیم با فرض درستی جملات $P(n-k), P(n-k+1),\ldots, P(n-1)$ بتوانیم درستی جمله $P(n)$ را نتیجه گرفت.

در این صورت، به ازای هر $n \ge m$ ، $P(n)$ برقرار است.

مثال 11. فرض کنید $x_1, x_2, x_3,\ldots$ دنباله ای از اعداد حقیقی ناصفر باشند که در رابطه ی زیر صدق می کنند:

$$x_n = \frac{x_{n-2}x_{n-1}}{2x_{n-2} - x_{n-1}} \qquad n = 3,4,5,\ldots$$

شرط لازم و کافی- روی x_1 و x_2 - برای این که x_n به ازای تعداد نامتناهی مقدار، صحیح باشد را به دست آورید.

حل . بهتر است برای فهمیدن مساله چند جمله ی اول این دنباله را- بر اساس x_1 و x_2 - محاسبه کنیم؛ شاید بتوانیم یک الگوی کلی برای جمله ی عمومی این دنباله- بر اساس x_1 و x_2 - به دست آوریم.

برای چند جمله ی اول این دنباله داریم:

$$x_3 = \frac{x_1x_2}{2x_1 - x_2}$$

$$x_4 = \frac{x_2x_3}{2x_2 - x_3} = \frac{x_1x_2}{3x_1 - 2x_2}$$

$$x_5 = \frac{x_3x_4}{2x_3 - x_4} = \frac{x_1x_2}{4x_1 - 3x_2}$$

$$x_6 = \frac{x_4x_5}{2x_4 - x_5} = \frac{x_1x_2}{5x_1 - 4x_2}$$

اگر خوب به جملات بالا نگاه کنیم می توانیم یک الگوی کلی حدس بزنیم و آن به این صورت است که

$$x_n = \frac{x_1x_2}{(n-1)x_1 - (n-2)x_2}$$

یا به عبارت دیگر:

$$x_n = \frac{x_1x_2}{(x_1 - x_2)n - (2x_2 - x_1)}$$

حال اگر بتوانیم فرمول بالا را اثبات کیم، می بینیم که اگر $x_1 \neq x_2$ باشد به ازای n های بزرگ قدر مطلق مخرج از صورت بیشتر می شود (چرا؟) و لذا x_n نمی تواند صحیح باشد. در نتیجه شرط لازم برای این که تعداد نامتناهی جمله از دنباله ی $x_1, x_2, x_3, \ldots$ صحیح باشند این است که $x_1 = x_2$. حال اگر $x_1 = x_2$ باشد، آن گاه کلیه ی جملات دنباله ی فوق برابر x_1 می شوند؛ بنابراین شرط لازم و کافی این است که $x_1 = x_2 \in \mathbf{Z}$.

حال بیایید با هم فرمول

$$x_n = \frac{x_1 x_2}{(n-1)x_1 - (n-2)x_2}$$

را ثابت کنیم.

حکم به ازای $n = 1, 2$ برقرار است. حال فرض کنید حکم به ازای $n-1$ و $n-2$ برقرار باشـد، می خواهیم درستی حکم را به ازای n ثابت کنیم:

$$x_n = \frac{x_{n-2}x_{n-1}}{2x_{n-2} - x_{n-1}}$$

$$= \frac{\dfrac{x_1x_2}{(n-3)x_1-(n-4)x_2} \times \dfrac{x_1x_2}{(n-2)x_1-(n-3)x_2}}{\dfrac{2x_1x_2}{(n-3)x_1-(n-4)x_2} - \dfrac{x_1x_2}{(n-2)x_1-(n-3)x_2}}$$

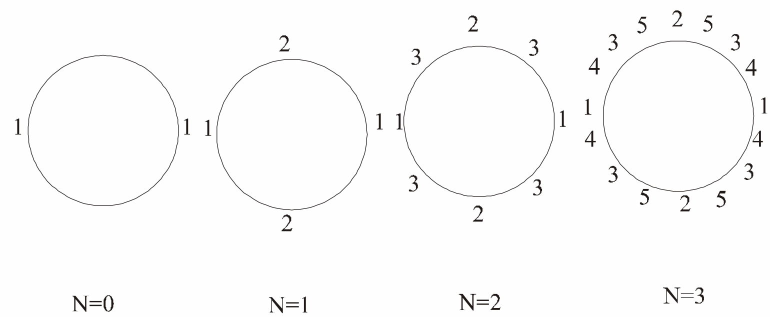
$$= \frac{x_1x_2}{2\left[(n-2)x_1-(n-3)x_2\right] - \left[(n-3)x_1-(n-4)x_2\right]}$$

$$= \frac{x_1x_2}{(n-1)x_1-(n-2)x_2}$$

پس حکم با استقرای چند پایه روی n ثابت شد.

مثال . در دو انتهای قطری از دایره، عددهای **1** را قرار داده ایم. هر یک از نیم دایره های حاصل را نصف کرده ایم و در وسط کمان هر نیم دایره، مجموع دو عددی که در دو انتهای آن وجود دارند قرار داده ایم (مرحله ی اول). در مرحله ی بعدی باز هر یک از چهار کمان حاصل را نصف کرده و در نقطه ی وسـط آنها، مجموع دو عددی را که در دو انتهای آن ها است، قرار داده ایم (مرحله ی دوم). این عمـل را n بـار

ادامه داده ایم. در پایان مرحله ی n ام مجموع همه ی عددهایی را پیدا کنید که روی محیط دایره نوشته ایم.



حل . باز مجموع اعداد را در چند گام اول حساب می کنیم و سعی می کنیم یک رابطه برای آن حدس بزنیم.

همان طور که در شکل بالا می بینید مجموع اعداد دور دایره در مرحله ی n ام احتمالاً باید برابر با 2×3^n باشد. حال بیایید حدس خود را ثابت کنیم.

حکم به ازای $n=0$ برقرار است. حال فرض کنید که مجموع اعداد در گام n ام برابر با $S_n=2\times3^n$ باشد. در مرحله $n+1$ ام، مجموع اعدادی که تازه روی محیط دایره نوشته می شوند برابر است با $2S_n$ (چرا؟). مجموع اعداد قبلی نیز برابر با S_n می باشد. بنابراین مجموع اعداد در گام $n+1$ ام برابر است با

$$S_{n+1}=3S_n=3\times2\times3^n=2\times3^{n+1}$$

در نتیجه حکم با استقرا روی مراحل ثابت شد.

مثال. مجموع اعداد سطر i ام مثلث زیر را بیابید.

1	1
3 5	8
7 9 11	27
13 15 17 19	64
21 23 25 27 29	125
$\vdots$	$\vdots$

حل . با پیدا کردن مجموع اعداد چند سطر اول، حدس می زنیم که مجموع اعداد سطر i ام برابر با i^3 باشد. می خواهیم این مسئله را اثبات کنیم، ولی نمی دانیم که چه اعدادی در سطر i ام قرار دارند. پس چه کار کنیم؟

پس بیایید ببینیم که مجموع اعداد سطر $i+1$ ام با مجموع اعداد سطر i ام چقدر اختلاف دارد؟ اگر حدس ما درست باشد باید این اختلاف به اندازه ی $(i+1)^3-i^3=3i^2+3i+1$ باشد. ببینیم آیا می توانیم این اختلاف را بشماریم؟ می دانیم که تعداد اعداد سطر $i+1$ ام، یکی بیشتر از اعداد سطر i ام است و اختلاف عدد k ام $(k=1, 2, \ldots, i)$ سطر $i+1$ ام با عدد k ام سطر i ام برابر $2i$ است. زیرا عدد k ام سطر $i+1$ ام، i امین عدد فرد بعد از عدد k ام سطر i ام است و اختلاف هر دو عدد فرد متوالی، برابر 2 است.

پس اگر آخرین عدد سطر $i+1$ ام برابر a_{i+1} باشد آنگاه، اختلاف مجموع اعداد سطر $i+1$ ام و مجموع اعداد سطر i ام برابر $2i^2+a_{i+1}$ است. پس اگر حدس ما درست باشد باید داشته باشیم $a_{i+1}+2i^2=3i^2+3i+1$. بنابراین حدس می زنیم که آخرین عدد سطر $i+1$ ام برابر i^2+3i+1 باشد. حال سعی می کنیم که حدس خود را با استقرا روی i ثابت کنیم.

لم . آخرین سطر $i+1$ ام مثلث فوق برابر است با i^2+3i+1.

اثبات لم . به ازای $i = 0$ که حکم واضح است. حال فرض کنید آخرین عدد سطر i ام برابر است با $(i-1)^2+3(i-1)+1=i^2+i-1$ (فرض استقرا). می خواهیم ثابت کنیم که آخرین عدد سطر $i+1$ام برابر است با i^2+3i+1 (حکم استقرا).

می دانیم بین آخرین عدد سطر i ام و آخرین عدد سطر $i+1$ ام، دقیقا i عدد فرد دیگر وجود دارد. یا به عبارت دیگر آخرین عدد سطر $i+1$ام، $i+1$امین عدد فرد بعد از آخرین عدد سطر i ام است. پس اختلاف آخرین عدد سطر iام با آخرین عدد سطر $i+1$ام برابر است با $2i+2$. درنتیجه آخرین عدد سطر $i+1$ام برابر است با $i^2+i-1+2i+2=i^2+3i+1$. در نتیجه لم ثابت شد. با توجه به لم بالا و مطالبی که در بالا گفته شد با استقرا روی i به راحتی ثابت می شود که مجموع اعداد سطر i ام برابر است با i^3.

مثال. برای عددهای $a_1,a_2,\ldots,a_n$ می دانیم:

$$0\le a_1\le a_2\le 2a_1, a_2\le a_3\le 2a_2,\ldots,a_{n-1}\le a_n\le 2a_{n-1}$$

ثابت کنید در مجموع $S=\pm a_1\pm a_2\pm a_3\pm\ldots\pm a_n$ می توان علامت ها را طوری تعیین کرد که داشته باشیم $0\le S\le a_1$.

حل . بیایید باز حکم را با استقرا ثابت کنیم. به ازای $n = 1$ که حکم واضح است. حال برای n عدد $a_2,a_3,\ldots,a_{n+1}$ حکم را درست فرض کنید یعنی فرض کنید بتوانیم در عبارت

$$S'=\pm a_2\pm a_3\pm\ldots\pm a_{n+1}$$

1

$\rightarrow$

23	12	7	2	25
6	17	24	13	8
11	22	1	18	3
16	5	20	9	4
21	10	15	4	19

جدول 4.3: طی کردن صفحات شطرنجی 1×1 و 5×5 با حرکت اسب

علامت های مثبت و منفی را طوری انتخاب کنیم که $0 \le S' \le a_2$ باشد.

می خواهیم ثابت کنیم در عبارت

$$S' = \pm a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_{n+1}$$

نیز می توانیم طوری علامت های مثبت و منفی را انتخاب کنیم که $0 \le S \le a_1$ باشد.

اگر بخواهیم از ساختار استقرایی استفاده کنیم باید داشته باشیم $S = \pm a_1 \pm S'$ و $0 \le S \le a_1$.

پس بیایید هر کدام از حالت ها را امتحان کنیم. حالت $S = -a_1 - S' \le 0$ مورد قبول نیست، حالت $S = a_1 + S' \ge a_1$ باز هم قابل قبول نیست. پس تنها دو حالت $S = a_1 - S'$ و $S = -a_1 + S'$ باقی می ماند. ببینیم این دو حالت در چه مواقعی قابل قبول است.

$$0 \le S = a_1 - S' \le a_1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le S' \le a_1$$

$$0 \le S = -a_1 + S' \le a_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 \le S' \le a_2 \le 2a_1$$

پس با توجه به این که $a_1 \le a_2 \le 2a_1$ می باشد. براساس این که مقدار S' در کدام یک از دو محدوده ی $0 \le S' \le a_1$ یا $a_1 \le S' \le a_2$ باشد، می توان عبارت $S = \pm a_1 \pm S'$ را طوری علامت گذاری کرد که $0 \le S \le a_1$ باشد.

مثال. ثابت کنید اسب بازی شطرنج را روی صفحه ی شطرنجی 2001×2001 می تـوان طـوری حرکت داد که در همه ی خانه ها، و در ضمن در هر کدام، تنها یک بار قرار گیرد.

حل . در مسایلی مثل مساله ی فوق که مسئله به صورت پارامتری داده نشده است ما باید حـدس بزنیم که مساله برای چه پارامترهایی درست است که 2001 هم یکی از آنها باشد. به عبارت دیگـر بایـد رابطه ی بین n هایی را پیدا کنیم که مسئله برای آنها درست است و 2001 هم در آن رابطه صـدق مـی کند؛ سپس با استفاده از استقرا درستی آن مسئله را برای آن n ها ثابت کنیم. اگر این کار ار انجام دهیم مسئله برای آن عدد خاص هم ثابت شده است.

پس ابتدا درستی حکم را برای صفحات شطرنجی $n \times n$، وقتی n کوچک باشد امتحان می کنـیم. می بینیم که حکم به ازای $n = 1, 5$ درست است. در جدول 3.4 حرکت اسب در صفحات شطرنجی 1×1 و 5×5 نشان داده شده است (اسب از خانه ی شماره ی 1 شروع می کند و از خانه ی شـماره ی i بـه خانه ی شماره ی $i + 1$ می رود).

پس توانستیم نشان دهیم که حکم به ازای $n = 1, 5$ درست است. بنابراین احتمالاً باید حکم بـه ازای $n = 4k + 1$ درست باشد. همان طور که در دو مثال $n = 1, 5$ نشان داده شده است اسب از وسط صفحه شطرنجی حرکت خود را آغاز کرده است و در خانه ی گوشه ی بالا سمت راست حرکت خود را به پایان رسانده است. همچنین حرکت اسب تا حد امکان در جهت حرکت عقربه های ساعت می باشد. پس سعی می کنیم برای n بزرگتر هم از این قوانین پیروی کنیم.

پایه ی استقرا به ازای $n = 1$ درست است. فرض کنید اسب بتواند با شروع از مرکز یک صفحه ی شطرنجی $(4k - 3) \times (4k - 3)$ از تمام خانه ها یک و فقط یک بار عبور کند و خود را به خانه ی گوشه ی

بالای سمت راست، برساند. می خواهیم ثابت کنیم می تواند در صفحه ی شطرنجی $(4k+1)\times(4k+1)$ نیز این کار را انجام دهد.

ابتدا اسب صفحه ی شطرنجی $(4k-3)\times(4k-3)$ وسطی را طبق فرض استقرا پیمایش می کند. حالا در خانه ی $(3, 4k-1)$ قرار دارد و فقط ستون های **1**، **2**، $4k$ و $4k+1$ و سطرهای **1**، **2**، $4k$ و $4k+1$ طی نشده اند. حال برای طی کردن خانه های باقی مانده از خانه های $(3, 4k-1)$ به ترتیب به خانه های زیر می رویم (در جهت عقربه های ساعت حرکت می کنیم).

77	50	37	64	79	52	39	26	81
36	63	78	51	38	65	80	53	40
49	76	23	12	7	2	25	65	27
62	35	6	17	24	13	8	41	54
75	48	11	22	1	18	3	28	67
34	61	16	5	20	9	14	55	42
47	74	21	10	15	4	19	68	29
60	33	72	45	58	31	70	43	56
73	46	59	32	71	44	57	30	69

جدول **4.4**: طی کردن صفحه ی شطرنجی **9** × **9** با حرکت اسب

$(1, 4k), (3, 4k+1), (5, 4k), \ldots, (4k-1, 4k+1), (4k+1, 4k),$

$(4k, 4k-2), (4k+1, 4k-4), \ldots, (4k+1, 4), (4k, 2),$

$(4k-2, 1), (4k-4, 2), \ldots, (4, 2), (2, 1),$

$(1, 3), (2, 5), \ldots, (2, 4k-3), (1, 4k-1), (2, 4k+1),$

$(4, 4k), (6, 4k + 1), \ldots, (4k - 2, 4k + 1), (4k, 4k),$

$(4k + 1, 4k - 2), (4k, 4k - 4), \ldots, (4k, 4), (4k + 1, 2),$

$(4k - 1, 1), (4k - 3, 2), \ldots, (5, 2), (3, 1), (1, 2),$

$(2, 4), (1, 6), \ldots, (1, 4k - 2), (2, 4k)$

$(4, 4k + 1), (6, 4k), \ldots, (4k - 2, 4k), (4k, 4k + 1),$

$(4k + 1, 4k - 1), (4k, 4k - 3), \ldots, (4k, 5), (4k + 1, 3), (4k, 1),$

$(4k - 2, 2), (4k - 4, 1), \ldots, (4, 1), (2, 2),$

$(1, 4), (2, 6), \ldots, (1, 4k - 4), (2, 4k - 2), (3, 4k),$

$(5, 4k + 1), (7, 4k), \ldots, (4k - 1, 4k), (4k + 1, 4k + 1),$

$(4k, 4k - 1), (4k + 1, 4k - 3), \ldots, (4k + 1, 5), (4k, 3), (4k + 1, 1),$

$(4k - 1, 2), (4k - 3, 1), \ldots, (5, 1), (3, 2), (1, 1),$

$(2, 3), (1, 5), \ldots, (1, 4k - 3), (2, 4k - 1), (1, 4k + 1)$

واضح است که پیمایش بالا تمام سطر و ستون های باقی مانده را طی می کند و به گوشه ی سمت راست بالای صفحه ی شطرنجی ختم می شود. پس حکم مساله با استقرا روی k ثابت شد و چون 2001 را می توان به صورت $4k+1$ نوشت، مساله ثابت شد.

مثال. n عدد طبیعی دلخواه است. یک ترتیب دلخواه از اعداد 1 تا n که در آن هر یک از اعداد 1 تا n دقیقاً یک بار آمده باشند را یک جایگشت از $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ می نامیم. می گوییم جایگشت $p_1, p_2, \ldots, p_n$ در دنباله ی $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ظاهر شده است، اگر اندیس های $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_n \le k$ وجود داشته باشند به طوری که برای هر $1 \le j \le n$ داشته باشیم $a_{i_j} = p_j$. به عنوان مثال جایگشت 2 ، 3 ، 1 در دنباله ی 3 ، 2 ، 3 ، 2 ، 1 ، 3 ظاهر شده است.

یک دنباله از اعداد 1 تا n «دنباله ی جالب» نامیده می شود، اگر هر جایگشت دلخواهی از

در این دنباله ظاهر شده باشد. $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$

ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n حداقل یک دنباله ی جالب به طول $2^n - 1$ وجود دارد.

حل .

راه حل اول. اگر بخواهیم از استقرا استفاده کنیم باید ساختار ساختن دنباله ی جالب برای n از ساختار دنباله ی جالب برای $n - 1$ به دست آید. بنابراین با این فرض بیایید چند دنباله ی جالب برای $n = 1, 2, 3, 4$ بسازیم.

1

1 ، 2 ، 1

1 ، 2 ، 1 ، 3 ، 1 ، 2 ، 1

1 ، 2 ، 1 ، 3 ، 1 ، 2 ، 1 ، 4 ، 1 ، 2 ، 1 ، 3 ، 1 ، 2 ، 1

در حالت کلی دنباله ی جالب به طول $2^n - 1$ را برای n به این صورت می سازیم. ابتدا یک دنباله ی جالب به طول $2^{n-1} - 1$ برای $n - 1$ می سازیم، سپس n را به آن اضافه می کنیم و بعد باز یک دنباله ی جالب به طول $2^{n-1} - 1$ برای $n - 1$ به انتهای آن اضافه می کنیم. به عبارت دیگر اگر $f(n)$ دنباله ی جالب برای n باشد، داریم: $f(n) = f(n - 1), n, f(n - 1)$.

واضح است که طول این دنباله برابر با $2^{n-1} - 1 + 1 + 2^{n-1} - 1 = 2^n - 1$ می باشد و یک دنباله ی جالب برای n می باشد. زیرا اگر $a_1, a_2, \ldots, a_n$ یک جایگشت از اعداد **1** تا n باشد و $a_i = n$ باشد، طبق فرض استقرا زیر دنباله ی $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$ در دنباله ی جالب سمت چپ برای $n - 1$ وجود دارد و باز

طبق فرض استقرا زیر دنباله ی $a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_n$ در دنباله ی جالب سمت راست برای $n - 1$ وجود دارد، بنابراین جایگشت $a_1, a_2, \ldots, a_n$ در دنباله ی جالب برای n وجود دارد.

راه حل دوم: اگر برای n یک دنباله ی جالب ساخته باشیم، برای $n + 1$ نیز یک دنباله ی جالب به این شکل می سازیم که در ابتدا و انتها و همچنین بین هر دو عنصر از دنباله ی جالب برای n، عدد $n + 1$ را می نویسیم. حال به وضوح دیده می شود که دنباله ی ساخته شده یک دنباله ی جالب برای $n + 1$ است و اگر دنباله ی جالب برای n به طول $2^n - 1$ باشد، دنباله ی جالب ساخته شده برای $n + 1$، به طول $2^{n+1} - 1$ می باشد.

1

2 ، 1 ، 2

3 ، 2 ، 3 ، 1 ، 3 ، 2 ، 3

4 ، 3 ، 4 ، 2 ، 4 ، 3 ، 4 ، 1 ، 4 ، 3 ، 4 ، 2 ، 4 ، 3 ، 4

به عنوان مثال در جدول بالا دنباله های جالب به ازای $n = 1, 2, 3, 4$، با استفاده از روش فوق ساخته شده اند.

مثال **17** . n نفر با شماره های **1** تا n $(n > 1)$ دور میزی نشسته اند و هر کدام k مهره در اختیار دارند. با شروع از نفر اول بازی زیر را انجام می دهیم. نفر او مهره ی خود را به نفر دوم می دهد و از این به بعد هر نفر که از نفر قبلی یک مهره دریافت کرده باشد دو مهره به نفر بعدی خود می دهد و اگر دو مهره دریافت کرده باشد، یک مهره به نفر بعدی می دهد. در این بازی منظور از نفر بعدی، نزدیک ترین

فرد در جهت عقربه های ساعت است. به محض آن که فردی تمام مهره هایش را از دسـت بدهـد از دور میز کنار می رود. مثلاً اگر $k = 1$ باشد، در ابتدای بازی نفر 1 و 2 از دور میز خارج می شوند.

الف. ثابت کنید اگر $k > 1$ و n توانی از 2 باشد، بازی پایان می پذیرد.

ب. ثابت کنید اگر $k = 1$ باشد، بازی تنها در صورتی پایان می پـذیرد کـه $n-1$ یـا $n-2$ توانی از 2 باشند.

حل . بیایید ببینیم که اگر نفر اول a مهره و بقیه ی نفرات b مهره داشته باشند، چه اتفـاقی مـی افتد. برای این منظور فرض کنید $f(n, a, b)$ تابعی باشد که مقدار آن 1 یا 0 است و بدین شـکل تعریـف شده است:

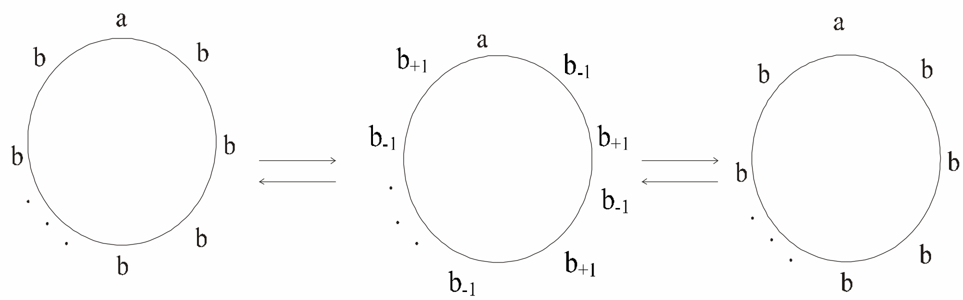
مقدار این تابع یک است، اگر n نفر باشند و نفر اول a مهره و بقیه هر کدام b مهره داشته باشند و بازی تمام شدنی باشد؛ همچنین مقدار این تابع صفر است اگر بازی تمام شدنی نباشد.

حـال بیـاییم چنـد حالـت را بـا یکـدیگر بررسـی کنـیم فـرض کنیـد اسـم ایـن n نفـر بـه ترتیب $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ باشد، در ابتدای کار A_1 یک مهره به A_2 می دهد (حالا A_1، $a-1$ مهره دارد)، سپس A_2 چون یک مهره دریافت کرده، دو مهره به A_3 می دهد (حالا A_2، $b-1$ مهـره دارد)، بعـد A_3 چون دو مهره دریافت کرده، یک مهره به A_4 می دهد (حالا A_3، $b+1$ مهره دارد)، سپس A_4 چون یک مهره در یافت کرده است، دو مهره به A_5 می دهد (حالا A_4، $b-1$ مهره دارد) و ... .

با دنبال کردن استراتژی بالابه نتایج زیر می رسیم:

1. اگر $a \geq 3$ و n فرد باشد، بعد از دور اول، تعداد مهره های هر فرد به ترتیب برابر است بـا $a, b-1, b+1, b-1, b+1, \ldots, b-1, b+1$، و چون به نفر اول این دفعه یک

مهره رسیده است پس دو مهره به نفر بعدی می دهد بنابراین بعد از یک دور دیگر به نفر اول دو مهره خواهد رسید و تعداد مهره های افراد به ترتیب برابر با $a, b, b, b, b, \ldots,$ b, b می شود (مطابق شکل). یا به عبارت دیگر اگر $a \ge 3$ و $b \ge 2$ باشد، آن گاه $f(2m+1, a, b) = 0$ است (بازی تمام نشدنی است).



2. اگر n فرد و $a = 2$ باشد، چون نفر اول در ابتدای دور دوم حذف می شود، در پایان دور دوم، نفر A_n، دو مهره به نفر A_2 می دهد و مهره های نفرات $A_2, A_3, \ldots, A_n$ به ترتیب برابر با $b + 2, b, b, b, \ldots, b, b$ می شود. پس اگر $b \ge 2$ باشد، $f(2m + 1, 2, b) = f(2m, b + 2, b)$.

3. اگر n زوج باشد، بعد از دور اول، تعداد مهره های هر فرد به ترتیب برابر با $a + 1, b - 1, b + 1, b - 1, \ldots, b + 1, b - 1$ خواهد بود و چون به نفر اول دو مهره رسیده باز بعد از یک دور دیگر تعداد مهره های افراد به ترتیب برابر با $a + 2, b - 2, b + 2, b - 2, \ldots, b + 2, b - 2$ خواهد شد. به این ترتیب بعد از دور b ام، نفرات با شماره ی زوج حذف خواهند شد و $\frac{n}{2}$ نفر خواهیم داشت که نفر اول $a+b$ مهره و بقیه ی افراد هر کدام، $2b$ مهره خواهند داشت. به عبارت دیگر به ازای $a \ge 2, b \ge 1$ داریم: $f(2m, a, b) = f(m, a + b, 2b)$.

حال قسمت الف مساله از ما می خواهد تعیین کنیم که $f(n,k,k)$ $(k \ge 2)$ در چه مواردی یک است و در چه مواردی صفر است. اگر $n=2^m$ باشد، با m بار استفاده از قاعده ی سوم نتیجه می گیریم که $f(n,a,b)=f(1,a+2^m\times b-b,2^m\times b)=1$. به طریق مشابه اگر $n=2^m+1$ باشد، طبق قاعده ی دو داریم $f(2^m+1,2,2)=f(2^{m-1},4,2)$ ولی در بالا اثبات کردیم که این مقدار برابر با یک است پس $f(2^m+1,2,2)=1=f(2^1,k,k)$.

حال ثابت می کنیم که به جز موارد گفته شده در بالا به ازای $k \ge 2$، مقدار $f(n, k, k)$ برابر صفر می باشد. فرض کنید $n=2^m(2t+1)$ باشد با m بار استفاده از قاعده ی سوم به این نتیجه می رسیم که $f(n,k,k)=f(2t+1,2^m\times k,2^m\times k)$ که اگر $k \ge 3$ یا $m \ge 1$ باشد طبق قاعده ی سوم $f(n,k,k)=0$ می باشد.

برای قسمت دوم به ازای $k = 1$، اگر n زوج باشد، در دور اول تمام نفرات با شماره های زوج و نفر اول از بازی خارج می شوند و تعداد مهره های نفر سوم **4** عدد و تعداد مهره های بقیه ی افراد **2** است یعنی بازی $f(2t, 1, 1) = f(t - 1, 4, 2)$ و در قسمت قبل ثابت کردیم که بازی $f(t - 1, 4, 2)$ وقتی و فقط وقتی یک است که $t-1=2^m$ در نتیجه باید $n=2^{m+1}+1$ باشد.

اگر n فرد باشد، در دور اول نفرات با شماره های زوج و نفر اول حذف می شوند و تعداد مهره های نفر آخر برابر با **3** و تعداد مهره های بقیه ی نفرات برار با **2** می شود پس داریم $f(2t + 1, 1, 1) = f(t, 3, 2)$ و در قسمت الف دیدیم که این بازی فقط و فقط وقتی یک است که $t=2^m$ باشد

یعنی $n = 2^{m+1} + 1$ باشد. پس بازی قسمت دوم، فقط و فقط به ازای $n = 2^{m} + 1$ یا $n = 2^{m} + 2$ تمـام شدنی است.