استقرای قوی

گاهی اوقات برای اثبات حکم استقرا به ازای n، لازم است که حکم استقرا را به ازای هر عدد صحیح کوچک تر از n و بزرگ تر یا مساوی m (m پایه استقرا می باشد). درست فرض کنیم تا بتوانیم حکم استقرا را به ازای هر مقدار صحیح $n \ge m$ ثابت کنیم. در چنین مواردی از اصل استقرای قوی کمک می گیریم؛ اصل استقرای قوی به شکل زیر است:

اصل استقرای ریاضی قوی. اگر m یک عدد طبیعی و $P(n)$ یک جمله بر اساس پارامتر n باشد، به طوری که:

الف. $P(m)$ برقرار باشد.

ب. به ازای هر $k \ge m$، بتوان از برقراری $P(m), P(m+1), \ldots P(k)$، برقراری $P(k+1)$ را نتیجه گرفت.

در این صورت، به ازای هر $n \ge m$، $P(n)$ برقرار است.

اصل استقرای قوی از اصل استقرای ضعیف، قوی تر است ولی هر دو، با اصل خوش ترتیبی و درنتیجه با هم معادل می باشند و با اصل قرار دادن یکی از آنها می توان درستی دیگر را ثابت کرد.

مثال. ثابت کنید هر عدد طبیعی بزرگ تر یا مساوی 2 را می توان به عوامل اول تجزیه کرد.

حل . واضح است که 2 را می توان به حاصل ضرب عوامل اول تجزیه کرد. (اگر p عددی اول باشد، خود p تجزیه ی p به عوامل اول می باشد.)

حال فرض کنید هر عدد طبیعی کوچک تر یا مساوی n را بتوان به عوامل اول تجزیه کرد. می خواهیم ثابت کنیم عدد طبیعی $n+1$ را هم می توان به عوامل اول تجزیه کرد.

اگر $n+1$ اول باشد، که خود $n+1$ تجزیه ی $n+1=n+1$ به عوامل اول است. پس فرض کنید

$n+1$ اول نباشد. در نتیجه دو عدد طبیعی $1<a, b<n+1$ وجود دارند که $n+1=ab$. بنا به فرض استقرا می توان a و b را به عنوان اول تجزیه کرد.

$$a=p_1p_2...p_k \qquad , \qquad b=q_1q_2...q_{k'}$$

پس $n+1=ab=p_1p_2...p_kq_1q_2...q_{k'}$ (p_i ها و q_j ها اولند.) یعنی $n+1$ به عوامل اول تجزیه شده است و حکم ثابت شد.

مثال. برای هر عدد صحیح غیر منفی n، عدد a_{n+1} از عدد a_n بر اساس قانون زیر به دست می آید:

اگر آخرین رقم سمت راست عدد a_n از 5 بیش تر باشد، $a_{n+1}=9a_n$. در غیر این صورت، رقم سمت راست a_n را کنار می گذاریم و ارقام باقی مانده نمایشگر a_{n+1} است ($a_{n+1}=a_n \text{div } 10$، div تقسیم صحیح است). اگر a_{n+1} شامل هیچ رقمی نباشد، کار پایان می یابد. آیا به ازای هر a_0 دلخواه، این فرآیند، پایان پذیر است؟

حل . بله، حکم را با استقرای قوی روی عدد a_0، ثابت می کنیم. اگر $a_0=1$ باشد که حکم واضح است. حال فرض کنید حکم برای اعداد 1 تا k برقرار باشد، ثابت می کنیم برای عدد $k+1$ نیز برقرار است. اگر رقم آخر عدد $k+1$ کوچک تر یا مساوی 5 باشد، یا با کنار گذاشتن آن رقم (یک مرحله از الگوریتم)، عدد حاصل دارای هیچ رقمی نیست که در نتیجه حکم اثبات می شود یا این که عدد $a=(k+1) \ div \ 10$ به دست می آید که چون عدد $a<k+1$ است، پس طبق فرض استقرا این فرآیند پایان

می یابد. ولی اگر رقم یکان عدد $k+1$ بزرگ تر از **5** باشد، با اجرای یک مرحله از این الگوریتم عدد $a = 9(k+1)$ به دست می آید که رقم یکان آن، برابر **1**، **2**، **3** یا **4** است و با اجرای یک مرحله ی دیگر از این الگوریتم عدد $b = a \ div\ 10 = 9(k+1)$ به دست می آید که عدد $b < k+1$ است. بنابراین بـاز طبق فرض استقرا، این فرآیند به پایان خواهد رسید.

مثال. فرض کنید که یک ماشین در اختیار داریم که می تواند این سه کار را بر روی کارت هایی که بر روی هر یک از آنها یک کلمه نوشته شده است انجام دهد:

- دو کارت که بر روی آنها دو کلمه نوشته شده است را بگیرد و یک کارت تولید کند که بر روی آن این دو کلمه پشت سر هم نوشته شده باشد. (برای مثال اگر بـر روی کـارت اول رشته ی aab و بر روی کارت دوم رشته bab نوشته شده باشد، خروجی ماشین کـارتی خواهد بود که بر روی آن $aabbab$ نوشته شده است.)
- یک کارت که بر روی آن کلمه ی S نوشته شده است را دریافت کند و در خروجی کارت ایجاد کند که بر روی آن aSb نوشته شده است. (برای مثال اگـر بـر روی کـارت ورودی کلمه ی aba نوشته شده باشد، خروجی ماشین کارتی خواهد بود که بر روی آن کلمه ی $aabab$ نوشته شده است.)
- یک کارت که بر روی آن کلمه ی S نوشته شده است را دریافت کند و در خروجی کارتی ایجاد کند که بر روی آن bSa نوشته شده است. (برای مثال اگـر بـر روی کـارت ورودی هیچ کلمه ای نوشته نشده باشد، خروجی ماشین کارتی خواهد بود که بر روی آن کلمـه ی ba نوشته شده است.)

در ابتدا تعداد زیادی کارت که بر روی آنها هیچ کلمه ای نوشته نشده است در اختیار ما قرار گرفته است.

الف. نشان دهید که با استفاده از این کارت ها و با این ماشین می توان کارتی را ایجاد کرد که بر روی آن کلمه ی $abbaba$ نوشته شده باشد.

ب. ثابت کنید که با استفاده از این ماشین می توان هر کارتی که بر روی آن یک کلمه نوشته شده است را تولید کرد، اگر و فقط اگر این این کلمه تنها از a و b تشکیل شده باشد و تعداد a های آن برابر b های آن باشد.

حل.

الف. ابتدا با استفاده از یک کارت خالی و عمل دوم، کارت ab و بعد با استفاده از یک کارت خالی و عمل سوم، کارت ba و بعد با استفاده از عمل اول و کارت های ab و ba، کارت $abba$ و بعد با استفاده از عمل اول و کارت های $abba$ و کارت ba، کارت $abbaba$ را تولید می کنیم.

ب. اگر کلمه ی S توسط این ماشین تولید شده باشد، با استقرای قوی روی طول کلمه ی S ثابت می کنیم که کلمه ی S تنها از حروف a و b تشکیل شده است و تعداد a ها و b ها در کلمه ی S با یکدیگر برابر است.

اگر طول S صفر باشد که حکم واضح است. فرض کنید این حکم برای همه ی کلمات S' با طول کمتر از n درست باشد. ثابت می کنیم برای هر کلمه ی S به طول n نیز درست است. اگر کلمه ی S با عمل اول درست شده باشد، یعنی $S = S_1S_2$ باشد، چون طول کلمات S_1 و S_2 کم تر از n است، پس کلمات S_1 و S_2 فقط از حروف a و b تشکیل شده اند و تعداد حرف های a در کلمه ی S_1 و S_2 برابر با

تعداد حرف های b در آنهاست. بنابراین کلمه ی S تنها از حروف a و b تشکیل شده است و تعداد حرف های a با تعداد حرف های b در S مساوی است. به طریق مشابه اگر کلمه ی S با استفاده از عمل دوم (سوم) درست شده باشد، یعنی $S=aS'b$ ($S=bS'a$) باشد. چون طول کلمه ی S' برابر با $n-2$ است، بنابراین طبق فرض استقرا کلمه ی S' تنها از حروف a و b تشکیل شده است و تعداد حروف a و b در کلمه ی S' با یکدیگر برابر است؛ در نتیجه کلمه ی $S=aS'b$ ($S=bS'a$) تنها از حروف a و b تشکیل شده است و تعداد حرف های a در کلمه ی S برابر تعداد حرف های b آن است. پس حکم با استقرا ثابت شد.

حال با استقرای قوی روی طول کلمه ی S ، ثابت می کنیم هر کلمه ای که تنها از حروف a و b تشکیل شده باشد و تعداد حروف a با تعداد حروف b برابر باشد را می توان تولید کرد.

اگر طول کلمه ی S صفر باشد که حکم واضح است. فرض کنید که حکم برای همه ی کلمات S' با طول کمتر از n درست باشد ثابت می کنیم برای هر کلمه ی S به طول n نیز حکم برقرار است. اگر حرف اول و آخر کلمه ی S متفاوت باشند، یعنی S به صورت $aS'b$ یا $bS'a$ باشد (S' کلمه ای است که از حذف حرف اول و آخر کلمه ی S به دست می آید). واضح است که کلمه ی S' تنها از حروف a و b ساخته شده است و تعداد حروف a با تعداد حروف b در آن مساوی است (زیرا در S چنین است) و طول کلمه ی S' کم تر از n است؛ پس طبق فرض استقرا می توان کلمه ی S' را تولید کرد. حال اگر کلمه ی $S=aS'b$ ($S=bS'a$) باشد، می توان با استفاده از کلمه ی S' و عمل دوم (عمل سوم) کلمه ی S را تولید کرد.

پس فرض کنید حروف اول و آخر کلمه ی S یکسان باشند. بنابر تقارن فرض کنید حرف اول و آخر کلمه ی S ، a باشد. x_i را مساوی تعداد a های کلمه ی S منهای تعداد b های آن در i حرف اول آن می گیریم. واضح است که $x_1=1$ و $x_{n-1}=-1$ (زیرا $x_n=0$ و حرف n ام a است). از طرف دیگر $|x_{i+1}-x_i|=1$ است؛ در نتیجه لااقل یک $i<n$ وجود دارد که $x_i=0$ باشد. حال فرض کنید $S=S_1S_2$ باشد که S_1 کلمه ای است که از i حرف اول کلمه ی S ساخته شده است و S_2 کلمه ای است که از $n-i$ حرف آخر کلمه ی S ساخته شده است. با توجه به این که $x_i=0$ و $x_n=0$ است؛ پس تعداد حروف a در کلمه ی $S_1(S_2)$ برابر با تعداد حروف b در آن است. از طرف دیگر طول کلمات S_1 و S_2 کم تر از n است و تنها از حروف a و b تشکیل شده اند. بنابراین طبق فرض استقرا می توان کلمات S_1 و S_2 را ساخت، حال با استفاده از کلمات S_1 و S_2 و عمل اول، می توان کلمه ی $S=S_1S_2$ را تولید کرد.

مثال. یک رشته، یک دنباله ی متناهی از صفر و یک است. A یک مجموعه ی متناهی از رشته هاست که برای هر دو رشته ی دلخواه a و b از آن داریم $ab=ba$، (منظور از ab رشته ای است که از کنار هم گذاشتن دو رشته ی a و b به دست می آید برای مثال اگر $a=011$ و $b=10$ باشد آنگاه $ab=01110$ خواهد بود.)

ثابت کنید که رشته ای مانند w وجود دارد که هر رشته ی دلخواه A را می توان از کنار گذاشتن تعدادی w به دست آورد.

حل . در صورتی که رشته ی b از کنار هم گذاشتن تعدادی رشته ی a تولید شود، a را یک سازه b می نامیم، طول رشته ی a را با $|a|$ نشان می دهیم. برای حل مسئله ابتدا دو لم زیر را ثابت می کنیم:

لم. اگر $ab=ba$ باشد، آنگاه a و b یک سازه ی مشترک دارند.

اثبات لم. حکم را با استقرا روی $|ab|$ ثابت می کنیم، اگر $|ab|=|a|+|b|=2$ باشد، حکم واضح است.

فرض می کنیم که حکم برای هر a' و b' که $a'b'=b'a'$ و $|a'b'|<|ab|$ باشد، برقرار باشد. حکم را برای a و b به این صورت ثابت می کنیم: بدون این که از کلیت مسأله کم شود می توان فرض کرد $|a|\le|b|$.

حال اگر $|a|=|b|$ باشد، آنگاه $a=b$، پس a و b سازه ی مشترک دارند. پس فرض کنید $|a|<|b|$ و $A=ab=ba$ باشد. از یک طرف $|a|$ رقم اول A، $|a|$ رقم اول رشته ی b و از طرف دیگر همان a می باشد. بنابراین رشته ی b به شکل $b=ab'$ می باشد که $|b'|<|b|$ و $A=ab=aab'=ba=ab'a$ می باشد؛ در نتیجه $b'a=ab'$. پس طبق فرض استقرا رشته های a و b' دارای سازه ی مشترکی مانند w هستند و چون این سازه ی مشترک هم a و هم b' را می سازد رشته ی $b=ab'$ را نیز می سازد. بنابراین w سازه ی مشترک رشته های a و b می باشد.

لم. اگر a و b دو سازه ی مشترک A باشند، آنگاه a و b سازه ی مشترک دارند.

اثبات لم . چون a و b سازه های مشترک A هستند، برای هر k داریم:

$$\underbrace{AA\cdots A}_{k}=\underbrace{aa\cdots a}_{\frac{k|A|}{|a|}}=\underbrace{bb\cdots b}_{\frac{k|A|}{|b|}}=X$$

d را بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک $|a|$ و $|b|$ می گیریم. فرض می کنیم:

$$X=w_1w_2\ldots w_n,\ n=\frac{k|A|}{d},\ |w_i|=d$$

از طرفی چون $X = aa\ldots a$ است، به ازای هر l داریم $w_i = w_{i+\frac{l|a|}{d}}$. از طرف دیگر

چون $X = bb\ldots b$ است، بنابراین به ازای هر l داریم $w_i = w_{i+\frac{l|b|}{d}}$. با توجه به این که d بزرگ ترین

مقسوم علیه مشترک $|a|$ و $|b|$ می باشد، اعداد صحیح و مثبت l_1 و l_2 وجود دارند به طوری که:

$$l_1|a| - l_2|b| = d \Rightarrow \frac{l_1|a|}{d} = \frac{l_2|b|}{d} + 1$$

بنابراین به ازای هر i داریم:

$$w_i = w_{i+l_1|a|/d} = w_{i+l_2|b|/d+1} = w_{i+1}$$

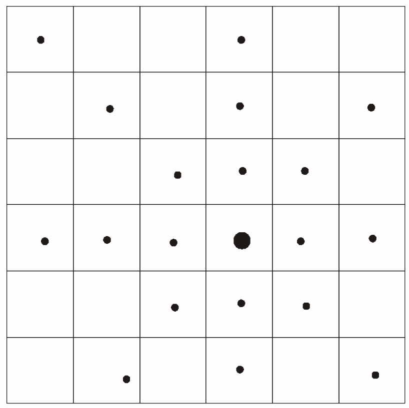
پس $w = w_i$ یک سازه ی مشترک برای b و a می باشد.

نتیجه ی لم. اگر $a_1 a_2 \ldots a_n$ سازه های A باشند، آنگاه a_i ها دارای سازه ی مشترکی می باشند.

یک عضو دلخواه از A را به دلخواه انتخاب می کنیم و آن را a می نامیم. برای هر $b_i \in A$ بنا به فرض داریم $ab_i = b_i a$ و در نتیجه لم 1 نتیجه می دهد که a و b_i سازه ی مشترکی دارند که آن را w_i می نامیم. حال همه ی w_i ها را در نظر می گیریم. بنا به نتیجه ی لم 2، این رشته ها دارای یک سازه ی مشترک هستند که آن را w می نامیم. چون w سازه ی w_i و w_i سازه ی b_i است، پس w سازه ی مشترک همه ی b_i هاست و بنابراین حکم ثابت شد.

مثال. یک جدول $n \times n$ با k مهره روی خانه های قطر اصلی آن داده شده است. قطر اصلی قطری است که گوشه ی چپ بالا را به گوشه ی راست پایین متصل می کند. همچنین دوخانه ی جدول روی یک قطر فرعی اند اگر قدر مطلق تفاضل شماره ی سطر آن دو با قدر مطلق تفاضل شماره ی ستون آن دو،

برابر باشد. هر مهره خانه هایی از جدول را تهدید می کند که با خانه ی آن در یک سطر، یا ستون یا قطر فرعی قرار گیرد. به عنوان مثال در شکل زیر دایره ی سیاه یک مهره است ونقاط نشان دهنده ی خانه هایی هستند که توسط این مهره تهدید می شوند.

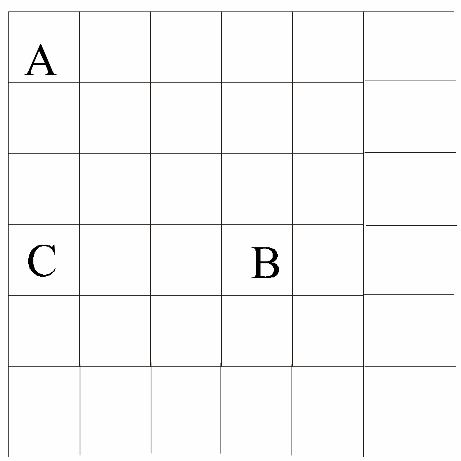


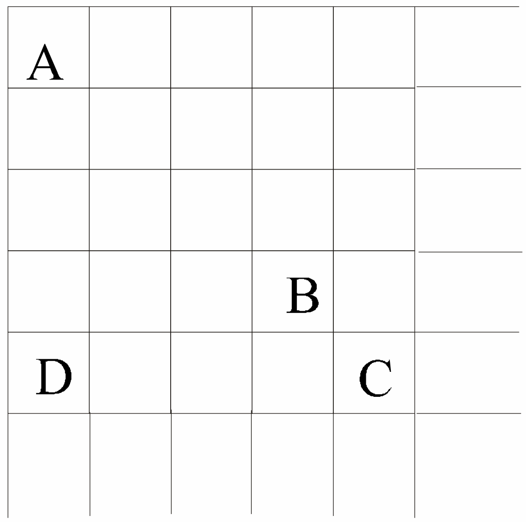
می دانیم که این k مهره همه ی خانه های جدول را تهدید می کنند. ثابت کنید $k \geq \left\lfloor \frac{2n-1}{3} \right\rfloor$ است. (منظور از $\lfloor x \rfloor$، بزرگ ترین عدد صحیح کوچک تر یا مساوی x است.)

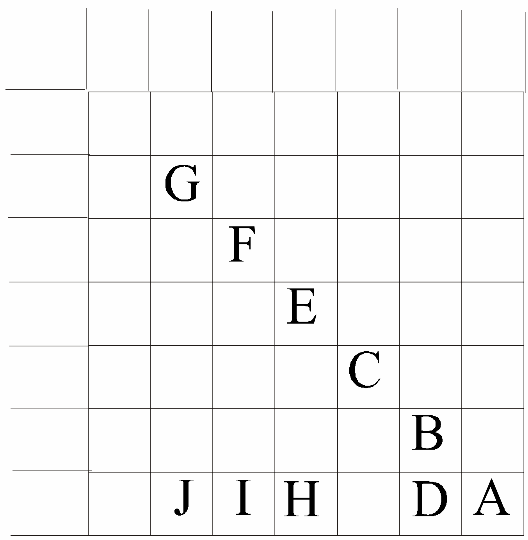
حل . برای این مساله راه حل های متفاوتی وجود دارد که به بعضی از آنها در زیر اشاره می کنیم:

راه حل اول: نخست دقت می کنیم که اگر دو خانه ی A و B که روی قطر اصلی قرار دارند، فاصله شان از هم فرد باشد (تعداد خانه های بین این دو خانه زوج باشد)، اگر روی این دو خانه مهره ای نباشد، خانه C که روی ستون A و سطر B قرار دارد، توسط هیچ مهره ای تهدید نمی شود، پس با خانه ی A، یا خانه B شامل مهره است. به عبارت دیگر، در هر دو خانه ای که فاصله شان فرد است، حداقل یک مهره وجود دارد. بنابراین همه ی خانه های با شماره های زوج یا همه ی خانه های با شماره های فرد باید شامل

مهره باشند. (کافی است یکی از خانه هایی را که روی آن مهره ای قرار ندارد در نظر بگیرید. واضح است اگر این خانه زوج باشد، روی هر خانه ی فرد باید یک مهره باشد و همچنین اگر این خانه فرد باشد، باید روی تمام خانه های زوج یک مهره باشد.) حال دقت می کنیم که از هر سه خانه ی متوالی از خانه های فرد (یا زوج)، باید حداقل درون یکی از آنها مهره باشد. (چون مطابق شکل اگر A و B و C خالی باشند خانه ی D تهدید نشده باقی می ماند) پس حداقل روی $\left\lfloor \frac{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ خانه های قطر، مهره وجود داشته است که با حالت گیری روی باقی مانده بر **6** ثابت می شود که حداقل مهره های لازم $\left\lfloor \frac{2n-1}{3} \right\rfloor$ می باشد.







راه حل دوم : در این راه حل از استقرا استفاده می کنیم اگر حداقل مهره های لازم برای جدول $n \times n$، $f(n)$ باشد، برای پایه ی استقرا حکم $f(n) \geq \left\lfloor \frac{2n-1}{3} \right\rfloor$ به راحتی نشان داده مـی شـود.

حال فرض می کنیم برای هر $p < n$ داشته باشـیم $f(p) \geq \left\lfloor \frac{2p-1}{3} \right\rfloor$. حـال جـدول $n \times n$ را در نظـر بگیرید. به خانه های A و B و C توجه کنید. برای پوشیده شدن خانه های جدول 3×3 پایین یا بایـد در

خانه ی B مهره ای قرار گیرد و در غیر این صورت باید در خانه های A و C مهره قرار گیرد. اگر در خانه های A و C مهره قرار گیرد که داریم:

$$f(n) \geq f(n-2)+2 \geq \left\lfloor \frac{2(n-2)-1}{3}+2 \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{2n-1}{3} \right\rfloor$$

در غیر این صورت اگر جدول 3×3 پایین دو مهره نداشته باشد، باید در خانه ی B حتماً مهره ای قرار گیرد؛ در این صورت برای تهدید شدن خانه های H و J و I باید در تک تک خانه های E و H و G مهره وجود داشته باشد زیرا در خانه های A و C مهره ای وجود ندارد. پس در این صورت داریم:

$$f(n) \geq f(n-6)+4 \geq \left\lfloor \frac{2(n-6)-1}{3}+4 \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{2n-1}{3} \right\rfloor$$

توضیح **. مساله ی انتخاب k خانه روی قطر اصلی به عنوان مکان k مهره معادل آن است که k عدد از اعداد $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ انتخاب کنیم به طوری که در بین اعدادی که انتخاب نکرده ایم، تفاضل هیچ دو عددی فرد نباشد و میانگین هردو عدد انتخاب نشده، انتخاب شده باشد. با توجه به این موضوع اگر $f(n)$، حداقل تعداد مهره های لازم باشد، ثابت کردیم: $f(n) \geq \left\lfloor \frac{2n-1}{3} \right\rfloor$ ولی قابل توجه است که $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n}=1$**