

## اصول اساسی شمارش

در بسیاری از مسایل به شمردن تعداد حالات پیشامدهایی نظیر قرار گرفتن اشیا در جاهای مشخص یا تقسیم شدن آنها طبق شرایطی معین، یا ایستادن افراد بر حسب ویژگی های خاصی نیازمندیم.

برای مثال، ممکن است به مسایل شمارشی زیر برخورد کنید:

«چند حالت برای ایستادن 5 پسر و 3 دختر در یک صف وجود دارد به طوری که هیچ دو دختری

کنار هم قرار نگیرند؟»

«تعداد افراد بزرگ تر از 53000 که ارقام تکراری ندارند، چقدر است؟»

«تعداد زیرمجموعه های 7 عضوی مجموعه  $\{1, 2, K, 20\}$  که هیچ دو عضو متوالی ندارند، چقدر

است؟»

موارد فوق سه مثال ساده از مسایل شمارشی هستند که مربوط به موضوعاتی می باشند که

«آنالیز ترکیبی» نامیده می شوند. قبل از هر توضیحی راجع به آنالیز ترکیبی، باید با دو اصل اساسی در

مسایل شمارشی یعنی اصل جمع و ضرب آشنا شویم.

### اصل جمع:

اگر پیشامد  $E$  را بتوان به  $k$  پیشامد  $E_1, E_2, \dots, E_k$ ، تقسیم کرد به طوری که:

$n_1$  حالت برای اتفاق افتادن پیشامد  $E_1$ ،

$n_2$  حالت برای اتفاق افتادن پیشامد  $E_2$ ،

$n_k$  حالت برای اتفاق افتادن پیشامد  $E_k$ ،

وجود داشته باشد و هیچ دو پیشامدی با هم اتفاق نیفتند آنگاه، تعداد حالات اتفاق افتادن یکی از

پیشامدهای  $E_1, E_2, \dots, E_k$  برابر است با

$$\sum_{i=1}^k n_i = n_1 + n_2 + \dots + n_k$$

**مثال.** فردی می تواند از سه مسیر هوایی، دریایی و زمینی از شهر  $P$  به شهر  $Q$  مسافرت کند.

فرض کنید 3 راه برای سفر هوایی، 2 راه بری سفر زمینی و 2 راه برای سفر دریایی وجود داشته باشد.

این شخص به چند طریق می تواند از شهر  $P$  به شهر  $Q$ ، مسافرت کند؟

**حل.** طبق اصل جمع، این شخص به  $7 = 2 + 2 + 3$  طریق می تواند از شهر  $P$  به شهر  $Q$  مسافرت

کند.

فرض کنید  $k$  یک عدد طبیعی و  $A_1, A_2, \dots, A_k$  مجموعه ی متناهی  
و دو به دو مجزا باشند؛ یعنی به ازای هر  $i, j = 1, 2, \dots, k$  داشته  
باشیم  $A_i \cap A_j = \emptyset$ . آن گاه داریم:

**اصل ضرب:**

اگر پیشامد  $E$  را بتوان به  $k$  پیشامد پشت سر هم  $E_1, E_2, \dots, E_k$ ، تقسیم کرد به طوری که:

$n_1$  حالت برای اتفاق افتادن پیشامد  $E_1$ ،

$n_2$  حالت برای اتفاق افتادن پیشامد  $E_2$ .

M

$n_k$  حالت برای اتفاق افتادن پیشامد  $E_k$ .

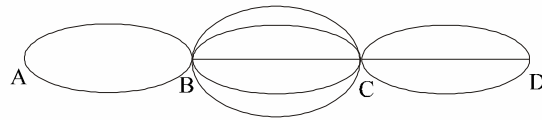
وجود داشته باشد آن گاه، تعداد حالات اتفاق افتادن پیشامد  $E$  (اول پیشامد  $E_1$ ، بعد پیشامد  $E_2$ ،

... و در آخر پیشامد  $E_k$ ) برابر است با:

$$\prod_{i=1}^k n_i = n_1 n_2 \dots n_k$$

**مثال.** شخصی می خواهد از شهر  $A$  به شهر  $D$  برود. برای رفتن از شهر  $A$  به شهر  $D$ ، باید طبق

شکل زیر از شهرهای  $B$  و  $C$  عبور کرد. این شخص به چند طریق می تواند از شهر  $A$  به شهر  $D$  برود؟



**حل.** طبق اصل ضرب، این شخص به  $30 = 3 \times 5 \times 2$  طریق می تواند از شهر  $A$  به شهر  $D$  برود.

اگر  $k$  یک عدد طبیعی و  $A_1, A_2, \dots, A_k$ ،  $k$  مجموعه ی متناهی باشند؛

آن گاه داریم:

$$\left| \prod_{i=1}^k A_i \right| = \prod_{i=1}^k |A_i| = |A_1| \times |A_2| \times \dots \times |A_k|$$

مثال. تعداد مقسوم علیه های طبیعی عدد 360 را بیابید.

حل. چون  $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ ، پس هر مقسوم علیه طبیعی 360 را می توان به

صورت  $2^a \times 3^b \times 5^c$  نوشت که در آن

$$a, b, c \in \mathbf{Z}, \quad 0 \leq a \leq 3, 0 \leq b \leq 2, 0 \leq c \leq 1$$

و بالعکس هر عدد که به صورت فوق نوشته شود یک مقسوم علیه طبیعی عدد 360 است. حال

چون  $a$  را به 4 حالت،  $b$  را به 3 حالت و  $c$  را به 2 حالت می توان انتخاب کرد پس تعداد مقسوم علیه های

طبیعی 360 برابر است با:  $4 \times 3 \times 2 = 24$ . نکته: اگر  $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$  باشد به طوری که  $p_i$  ها اعداد

اول متمایزی باشند ( $n$  را به حاصل ضرب عوامل اول تجزیه کرده ایم.) می دانیم

عدد  $m = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_k^{b_k}$  مقسوم علیه عدد  $n$  است اگر و تنها اگر به

هر  $b_i, 1 \leq i \leq k$  می تواند هر یک از مقادیر  $0, 1, \dots, a_i$  را بگیرد. بنابراین طبق اصل ضرب تعداد مقسوم

علیه های مثبت  $n$  برابر است با:

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$$

یک دنباله از اعداد  $a_1 a_2 \dots a_n$  یک «دنباله در مبنای  $k$ » نامیده می شود، اگر به ازای هر  $i = 1, 2, \dots, n$

$a_i \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$  باشد. به تعداد جملات یک دنباله طول آن دنباله می گویند. به عنوان

مثال  $\{00, 01, 10, 11\}$  مجموعه ی تمام دنباله های به طول 2 در مبنای 2 می باشد.

مثال. چند دنباله به طول  $n$  در مبنای  $k$  وجود دارد؟ ( $k, n \in \mathbf{N}$ )

حل. برای ساختن دنباله ی  $a_1 a_2 \dots a_n$  در مبنای  $k$ ، به  $k$  طریق می توان  $a_1$  را از

مجموعه ی  $\{0, 1, 2, \dots, k-1\}$  انتخاب کرد. به طریق مشابه، هر یک از جمله های  $a_2, a_3, \dots, a_n$  را نیز به  $k$

طریق می توان انتخاب کرد. پس تعداد دنباله های به طول  $n$  در مبنای  $k$  برابر است

$$\underbrace{k \times k \times \dots \times k}_n = k^n$$

در مثال های بالا، مشاهده کردید که چگونه اصل های جمع و ضرب به طور جداگانه در حل مسایل

شمارشی به کار می روند. اما در حل مسایل پیچیده تر، ما ناچار می شویم از هر دو اصل جمع و ضرب

استفاده کنیم. برای روشن شدن این مطلب به حل مثال های زیر می پردازیم.

**مثال.** در زبان برنامه نویسی پاسکال نام متغیرها از یک حرف تنها یا یک حرف و به دنبال آن

دنباله ای از اعداد و حروف تشکیل شده است. در این زبان چند متغیر به طول حداکثر 4 وجود دارد؟

**حل.** تعداد متغیرهای به طول یک برابر است با 26، تعداد متغیرهای به طول دو برابر است با  $36 \times$

26 (زیرا کاراکتر دوم می تواند هر یک از 26 حرف الفبا یا هر یک از 10 رقم باشد)، تعداد متغیرهای به

طول سه برابر است با  $36 \times 36 \times 26$ ، همچنین تعداد متغیرهای به طول چهار برابر است با  $36 \times 36 \times$

$26 \times$  بنابراین طبق اصل جمع تعداد متغیرهای به طول حداکثر 4 برابر است با:

$$26 + 26 \times 36 + 26 \times 36^2 + 26 \times 36^3 = 26 \times \frac{36^4 - 1}{35}$$

در حل مثال قبل دیدیم که مسأله را نمی توان مستقیماً با اصل جمع یا ضرب حل کرد. بنابراین

مسأله را به چند مسأله ی کوچکتر (براساس طول متغیرها) تقسیم کردیم. سپس هر یک از زیر مسأله ها

را حل کردیم و بعد با ترکیب جواب زیر مسأله ها (جمع زدن جواب آنها)، جواب مسأله ی اصلی را به

دست آوردیم. این تکنیک که روش تقسیم و حل نام دارد در حل بسیاری از مسایل به ما کمک می کند.

**مثال.** تعداد زوج مرتب های  $(x, y)$  از اعداد صحیح را بیابید به طوری که  $x^2 + y^2 \leq 7$ . (دقت

کنید که  $(-1, 2)$  با  $(2, -1)$ ، تفاوت دارد.)

حل.

(راه اول): (روش تقسیم و حل) اگر  $x^2 + y^2 \leq 7$  باشد آنگاه  $-2 \leq x, y \leq 2$ . حال مسأله را

براساس مقدار  $x$  به سه قسمت زیر تقسیم می کنیم:

•  $x = 0$ ، در این حالت به نامعادله  $y^2 \leq 7$  می رسیم که 5 جواب  $(-2 \leq y \leq 2)$  دارد.

پس تعداد زوج مرتب هایی که مؤلفه ی اول آنها صفر است برابر 5 می باشد.

•  $x = \pm 1$ ، در این حالت به نامعادله  $y^2 \leq 6$  می رسیم که 5 جواب  $(-2 \leq y \leq 2)$  دارد.

پس تعداد زوج مرتب هایی که مؤلفه ی اول آنها  $\pm 1$  است برابر  $2 \times 5 = 10$  می باشد

(خود  $x$  به دو طریق می تواند انتخاب شود).

•  $x = \pm 2$ ، در این حالت به نامعادله  $y^2 \leq 3$  می رسیم که 3 جواب  $(-1 \leq y \leq 1)$  دارد.

پس تعداد زوج مرتب هایی که مؤلفه ی اول آنها  $\pm 2$  است برابر  $2 \times 3 = 6$  می باشد

(خود  $x$  به دو طریق می تواند انتخاب شود).

بنابراین طبق اصل جمع، جواب مسأله برابر است با:  $5 + 10 + 6 = 21$

راه دوم: (روش اصل متمم). می دانیم تعداد زوج مرتب هایی که  $x^2 + y^2 \leq 7$  برابر است با تعداد

زوج مرتب هایی که  $x^2 + y^2 \leq 8$  منهای تعداد زوج مرتب هایی که  $x^2 + y^2 = 8$ .

اگر  $x^2 + y^2 \leq 8$ ، آنگاه  $-2 \leq x, y \leq 2$  می باشد. حال چون هر یک از مؤلفه های اول و دوم

(مستقل از یکدیگر) به 5 طریق  $(x = 0, \pm 1, \pm 2)$  و  $(y = 0, \pm 1, \pm 2)$  می توانند انتخاب شوند؛ پس تعداد

زوج مرتب هایی که  $x^2 + y^2 \leq 8$  برابر است با  $5 \times 5 = 25$ .

اگر  $x^2 + y^2 = 8$ ، آن گاه  $x = \pm 2$ ،  $y = \pm 2$ . پس تعداد زوج مرتب هایی که  $x^2 + y^2 = 8$  برابر

است با  $2 \times 2 = 4$ . در نتیجه جواب مسأله برابر است با  $25 - 4 = 21$ .

در حل مسأله ی بالا از اصل متمم استفاده کردیم، این اصل می گوید:

تعداد حالات قابل قبول = تعداد حالات غیرقابل قبول - تعداد کل حالات

اصل متمم: اگر  $A$  یک زیر مجموعه ی مجموعه ی منتهای مرجع  $U$  باشد.

$$|A'| = |U| - |A| \quad \text{آنگاه:}$$

**مثال.** برای عدد طبیعی  $n$  چند زوج مرتب از اعداد طبیعی وجود دارد که در معادله ی  $\frac{xy}{x+y} = n$

صدق می کند. (مسابقات ریاضی پاتنام، 1960)

$$\frac{xy}{x+y} = n \Rightarrow xy = nx + ny \Rightarrow xy - nx - ny + n^2 = (x-n)(y-n) = n^2. \text{ حل.}$$

پس اگر  $n^2 = ab$  باشد  $(a, b \in \mathbb{N})$ ، آن گاه  $x = n + a$  و  $y = n + b$  (دقت کنید که چون  $x$  و  $y$

باید اعداد طبیعی باشند، جواب  $x = n - a$  و  $y = n - b$  مورد قبول نمی باشد.) در نتیجه به ازای هر

تجزیه ی  $n^2$  به حاصل ضرب دو عدد طبیعی یک جواب یکتا برای زوج مرتب  $(x, y)$  به دست می آید.

ولی تعداد راه های تجزیه ی  $n^2$  به حاصل ضرب دو عدد طبیعی برابر با تعداد مقسوم علیه های  $n^2$  می

باشد. پس اگر  $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$  باشد، جواب مسأله برابر است با  $(2a_1 + 1)(2a_2 + 1) \dots (2a_k + 1)$ .

**مثال.** یک مکعب به ضلع 3 را در نظر بگیرید که در مرکز هر یک از مکعب های کوچک آن یک

نقطه گذاشته شده است (مجموعاً 27 نقطه) چند تا مجموعه ی سه تایی از این نقاط روی یک خط راست

قرار دارند؟ (مرحله ی اول پنجمین المپیاد کامپیوتر)

الف) 48      ب) 36      ج) 49      د) 43      ه) 37

**حل.** گزینه ی ج صحیح است. این مکعب را طوری در نظر بگیرید که اضلاع آن موازی محورهای

مختصات باشند. حال 3 لایه ی  $1 \times 3 \times 3$  عمود بر محور  $x$  ها، 3 لایه ی  $3 \times 1 \times 3$  عمود بر محور  $y$  ها و 3

لایه ی  $3 \times 3 \times 1$  عمود بر محور  $z$  ها را در نظر بگیرید. در هر یک از این 9 لایه 2 مجموعه ی سه تایی

وجود دارد که قطرهای آن لایه را می سازند. پس پاره خط های سه تایی به طول  $2\sqrt{2}$  (قطرهای فرعی)

برابر  $2 \times 9 = 18$  می باشد. همچنین موازی هر یک از محورهای مختصات (محور  $x$  ها، محور  $y$  ها و محور

$z$  ها) نه تا پاره خط سه تایی وجود دارد. پس  $3 \times 9 = 27$  خط موازی محورهای مختصات وجود دارد که

از سه تا از این نقاط می گذرند. همچنین از به هم پیوستن دو به دو 8 نقطه ی وسط مکعب های گوشه

ای مکعب که در یک وجه نیستند و نقطه ی داخل مکعب  $1 \times 1 \times 1$  وسطی (قطرهای اصلی) 4 پاره خط

به وجود می آید که از سه تا از این نقاط می گذرد. پس مجموعاً  $4 + 27 + 18 = 49$  پاره خط با شرایط

مورد نظر وجود دارد.

**مثال.** به چند طریق می توان سه عدد متفاوت از میان اعداد صحیح 1 تا 9 انتخاب کرد که مجموع

آنها بر سه بخش پذیر باشد؟ (مرحله اول نهمین المپیاد کامپیوتر)

الف) 27      ب) 28      ج) 30      د) 45      ه) 84



**حل.** گزینه ج صحیح است. اگر بخواهیم سه عدد انتخاب کنیم که مجموع آنها بر سه بخش پذیر

باشد، باید باقی مانده ی هر سه عدد بر 3 مساوی باشد (حالت اول) یا باقی مانده ی دو به دوی آنها

متمايز باشد (حالت دوم). باقی مانده ی اعضای مجموعه ی

$A = \{1, 4, 7\}$  بر 3 برابر 1، باقی مانده ی مجموعه ی  $B = \{2, 5, 8\}$  بر 3 برابر 2 و باقی

مانده ی اعضای مجموعه ی  $C = \{3, 6, 9\}$  بر 3 برابر 0 است. در حالت اول به سه طریق می توان این

اعداد را انتخاب کرد. در حالت دوم به سه حالت می توانیم یکی از اعضای  $A$ ، به سه حالت یکی از اعضای

$B$  و به سه حالت یکی از اعضای  $C$  را انتخاب کنیم. پس طبق اصل ضرب به  $3 \times 3 \times 3 = 27$  طریق می

توانیم سه عدد با باقی مانده های متمايز از بين اعداد صحیح 1 تا 9 انتخاب کنیم. حال طبق اصل جمع

جواب مسأله برابر است با  $3 + 27 = 30$ .

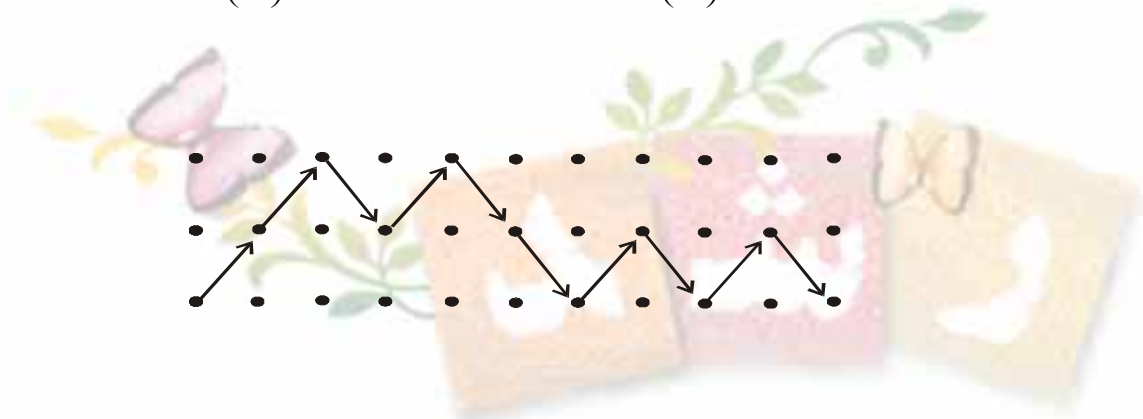
**مثال.** شکل زیر یک جدول  $3 \times 11$  با 33 نقطه را نشان می دهد. می خواهیم با استفاده از حرکت

های مورب (مانند شکل زیر) از نقطه ی گوشه ی سمت چپ و پایین به نقطه ی گوشه ی سمت راست و

پایین برویم. توجه کنید که با هر حرکت مورب فقط می توان به سمت راست شکل رفت. این کار به چند

طریق ممکن است؟

- الف)  $3^2 \times 2^4$       ب)  $3 \times \binom{10}{5}$       ج)  $2^5$       د)  $\binom{10}{5}$       ه)  $2^4$



**حل.** گزینه ه صحیح است. نقاط سطر دوم را به ترتیب  $B_1, B_2, \dots, B_{11}$  بنامید. هر مسیری از نقطه

ی گوشه ی سمت چپ و پایین (نقطه ی  $A$ ) به نقطه گوشه ی سمت راست و پایین (نقطه  $C$ ) از

نقاط  $B_2, B_4, B_6, B_8, B_{10}$  می گذرد (چرا؟). از هر یک از نقاط  $B_2, B_4, B_6, B_8$  می توانیم هم به

سمت راست پایین و هم به سمت راست بالا برویم. از نقطه  $B_{10}$  هم باید به نقطه ی  $C$  برویم. بنابراین

$$\text{طبق اصل ضرب تعداد مسیرهای مورد نظر از } A \text{ به } C \text{ برابر است با } 2^4 = 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2.$$

**مثال.** به چند طریق می توان از میان اعداد 1 تا 30، سه عدد متمایز انتخاب کرد، به طوری که

تشکیل تصاعد هندسی دهند؟

- الف) 6      ب) 10      ج) 11      د) 12      ه) 13

**حل.** گزینه د صحیح است. اگر تصاعد هندسی را به شکل  $(a, aq, aq^2)$  نشان دهیم

داریم:  $1 \leq a \leq \left\lfloor \frac{30}{q^2} \right\rfloor$ . پس به ازای هر  $2 \leq q \leq 5$ ، دقیقاً  $\left\lfloor \frac{30}{q^2} \right\rfloor$  تصاعد هندسی با قدر نسبت  $q$  وجود

$$\text{دارد. پس طبق اصل جمع، تعداد کل تصاعد ها برابر است با: } \sum_{q=2}^5 \left\lfloor \frac{30}{q^2} \right\rfloor = 7 + 3 + 1 + 1 = 12.$$

در طبقه بندی ریاضیات، اصول جمع و ضرب بسیار بدیهی هستند، و به همین دلیل اغلب توسط

دانش آموزان، نادیده گرفته می شوند. ولی این دو اصل به واقع در حل مسایل شمارشی نقش اساسی

دارند. به طوری که در این قسمت دیدیم، ممکن است یک مسأله را نتوان به راحتی حل کرد ولی با

تقسیم آن مسأله به چند زیر مسأله ی کوچک تر و حل آن زیر مسأله ها و سپس ادغام جواب زیر

مسأله ها، می توان جواب مسأله ی اصلی را به دست آورد.