

فاکتوریل

حال که با اصول جمع و ضرب آشنا شدید، خوب است به معرفی فاکتوریل بپردازیم.

مثال. با حروف کلمه *Morteza* چند کلمه 7 حرفی با حروف متمایز می توان ساخت؟

حل. حرف اول این کلمه هفت حرفی هر یک از حروف $\{m, o, r, t, e, z, a\}$ می تواند باشد (7

طریق). حرف دوم، نمی تواند همان حرف اول باشد، بنابراین به 6 طریق می تواند انتخاب شود. حرف سوم،

نمی تواند حرف اول یا دوم باشد، بنابراین به 5 طریق می تواند انتخاب شود، به همین ترتیب حرف چهارم،

پنجم، ششم و هفتم به ترتیب، به 4، 3، 2 و 1 طریق می توانند انتخاب شوند. پس طبق اصل ضرب، $5040 =$

$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ کلمه 7 حرفی با حروف کلمه *Morteza* می توان ساخت.

تعریف فاکتوریل:

به ازای هر عدد صحیح $n \geq 0$ ، $n!$ (که n فاکتوریل، خوانده می شود) به صورت زیر تعریف می شود:

$$0! = 1$$

$$n! = n(n-1)! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1, n \geq 1$$

با توجه به تعریف فاکتوریل، جواب مثال قبلی برابر است با $7!$ ، همچنین داریم: $1! = 1$ ، $2! = 2$ و $6!$

3!

مثال. با حروف $\{a, b, c, d, e\}$ چند کلمه 3 حرفی با حروف متمایز، می توان ساخت؟

فرض کنید که هر ترکیب سه حرفی از حروف بالا، تشکیل یک کلمه را می دهد. مثلاً کلمه abc یک

کلمه مجاز است ولی کلمه aba یک کلمه غیرمجاز است زیرا حرف a دوبار تکرار شده است. هم چنین کلمه abc با کلمه bac فرق دارد.

حل. حرف اول این کلمه سه حرف هر یک از حروف $\{a, b, c, d, e\}$ می تواند باشد (5 طریق). حرف دوم، نمی تواند همان حرف اول باشد، بنابراین به 4 طریق می تواند انتخاب شود. حرف سوم، نمی تواند همان حرف اول یا دوم باشد، بنابراین به 3 طریق می تواند انتخاب شود. پس طبق اصل ضرب $5 \times 4 \times 3 = 60$ کلمه

$$\frac{5!}{2!} = 60 \text{ مختلف وجود دارد.}$$

مثال. مقدار $\frac{n!}{(n-r)!r!}$ را برای $n = 10$ و $r = 6$ و نیز در حالت $n = 10$ و $r = 4$ محاسبه نمائید و جوابها را با هم مقایسه نمائید.

حل.

$$\frac{10!}{(10-6)!6!} \quad : r = 6, n = 10$$

$$= \frac{10!}{4!6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$$

$$: r = 4 \text{ و } n = 10$$

$$\frac{10!}{(10-4)!4!} = \frac{10!}{4!6!} = 210$$

مثال. ثابت کنید $\frac{(2n)!}{n!} > 2^n \cdot 5^{(n-2)}$ برای $n > 1$

حل. به راحتی استقرا می‌زنیم:

$$\frac{(2 \times 2)!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 12 > 2^2 \times 5^0$$

حال فرض می‌کنیم $\frac{(2k)!}{k!} > 2^k \cdot 5^{(k-2)}$ باشد برای $n = (k+1)$ داریم:

$$\frac{(2(k+1))!}{(k+1)!} = \frac{(2k+2)!}{(k+1)(k)!} = \frac{(2k+2)(2k+1)(2k)!}{(k+1)(k)!}$$

$$\Rightarrow \frac{(2(k+1))!}{(k+1)!} > \frac{(2k+2)}{k+1} \times (2k+1) \times 2^k \cdot 5^{k-2}$$

از طرفی $\frac{2k+2}{k+2} = 2$ و $2k+1 > 5$

$$\Rightarrow \frac{(2(k+1))!}{(k+1)!} > 2 \times 5 \times 2^k \times 5^{k-2} = 2^{k+1} \times 5^{(k+1)-2}$$

لذا حکم ثابت است.

مثال. ثابت کنید $n! = (n-2)! \times (n^2 - n)$

حل. به سادگی داریم:

$$(n-2)! \times (n^2 - n) = (n-2)! \times (n(n-1))$$

$$= (n-2) \times (n-3) \times \dots \times 2 \times 1 \times n \times (n-1) = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 2 \times 1 = n!$$