

جایگشت‌ها و جایگشت‌های با تکرار

جایگشت (تبديل) :

جایگشت‌ها که به آن‌ها تبدیل یا ترتیب هم می‌گوییم به طور کلی آرایش‌بندی‌های مرتب از اشیاء هستند، دقت

کنید که در آنها ترتیب اشیاء مهم می‌باشد.

به طور مثال به چند طریق می‌توان باسه حرف a و b و c کلمات سه حرفی بدون حروف تکراری نوشت؟

از آنجا که در این کلمات، کلمه abc با کلمه acb تفاوت دارد یعنی ترتیب حروف (جای b و c) اهمیت دارد پس

سؤال به تعداد جایگشت‌های سه‌تایی این حروف می‌پردازد. که بنابر اصل ضرب، $1 \times 2 \times 3$ طریق می‌باشد.

مثال. 10 نفر با شماره‌های 1 تا 10 در جلسه‌ای شرکت کرده‌اند. به چند طریق می‌توان از میان آنها یک نفر رئیس

جلسه، یک نفر منشی جلسه و یک نفر معاون جلسه انتخاب کرد. به شرطی که هر نفر حداکثر یک پست داشته باشد.

حل. دقت کنید که این سؤال متناظر با تعداد جایگشت‌های 3‌تایی اعداد 1 تا 10 می‌باشد

معاون منشی جلسه رئیس جلسه

10

* 9

* 8

حالته

حالته

حالته

برای انتخاب رئیس جلسه 10 حالت داریم و پس از انتخاب فرد i برای رئیس جلسه این فرد دیگر نمی‌تواند منشی

جلسه باشد پس برای انتخاب منشی جلسه 9 حالت داریم و اگر منشی جلسه را زبانمایم برای انتخاب معاون، می‌دانیم i

و زنمی‌توانند معاون هم باشند پس 8 نفر دیگر می‌ماند و 8 حالت داریم پس بنابر اصل ضرب $8 \times 9 \times 10$ حالت داریم. که

این تعداد را می‌توان به صورت زیر هم نشان داد:

$$10 \times 9 \times 8 = \frac{10!}{(10-3)!}$$

در حالت کلی جواب هر یک از مسایل زیر که می‌خواهیم از بین n شیء متمایز، k شیء را انتخاب کنیم و ترتیب

اشیاء مهم است را با P_k^n نشان می‌دهند و می‌خوانند «تبديل k از n ».

«با حروف $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ چند کلمه‌ی k حرفی با حروف متمایز می‌توان ساخت؟»

«در یک مسابقهٔ دوی ماراتن با n شرکت کننده، به چند طریق رتبه‌های 1 تا k مشخص می‌شوند؟»

با استدلالی شبیه استدلال مثال بالا، می‌توانید ثابت کنید:

$$P_k^n = n(n-1)(n-2) \mathbf{L} (n-k+1)$$

با توجه به تعریف فاکتوریل و تبدیل داریم:

$$P_k^n = n(n-1)(n-2) \mathbf{L} (n-k+1)$$

$$\times \frac{(n-k)(n-k-1) \times \mathbf{L} \times 2 \times 1}{(n-k)(n-k-1) \times \mathbf{L} \times 2 \times 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال.

الف. با 10 حرف A, B, C, D, E, F, G, H, I و J چند کلمه 5 حرفی با حروف متمایز می‌توان ساخت؟

ب. در چند تا از کلمات قسمت الف، حروف A, B, C, D, E و F فقط در مکان‌های فرد و بقیه حروف در

مکان‌های زوج استفاده شده است؟

حل.

الف. تعداد کلمات 5 حرفی با کلمات متمایز که با 10 حرف می‌توان ساخت برابر است با P_5^{10} .

ب. به P_3^6 طریق حروف مکان‌های فرد و به P_2^4 طریق حروف مکان‌های زوج را می‌توان تعیین کرد، پس

جواب مسئله برابر است با: $.P_3^6 \times P_2^4$

مثال. 9 کتاب ریاضی و 4 کتاب فیزیک را به چند طریق می‌توان در یک قفسه به طوری که:

الف. هیچ شرطی وجود نداشته باشد.

ب. کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند. (بین هیچ دو کتاب فیزیک، کتاب ریاضی نباشد.)

ج. هیچ دو کتاب فیزیکی کنار هم نباشند و کتاب‌های اول و آخر ریاضی باشند.

د. بین دو کتاب ریاضی M_1 و M_2 ، دقیقاً سه کتاب فیزیک باشد و هیچ کتاب ریاضی نباشد.

حل.

الف. چون 13 کتاب داریم، پس به 13 طریق می‌توان آنها را در قفسه چید.

ب. چون کتاب‌های فیزیک باید مجاور باشند، کتاب‌های فیزیک را، یک کتاب مانند P ، در نظر می‌گیریم.

بنابراین 9 کتاب ریاضی و کتاب P را به 10 حالت، می‌توانیم بچینیم. از طرف دیگر خود کتاب P

می‌تواند به 4! حالت چیده شود. بنابر اصل ضرب جواب مسأله برابر است با : $4! \times 10!$.

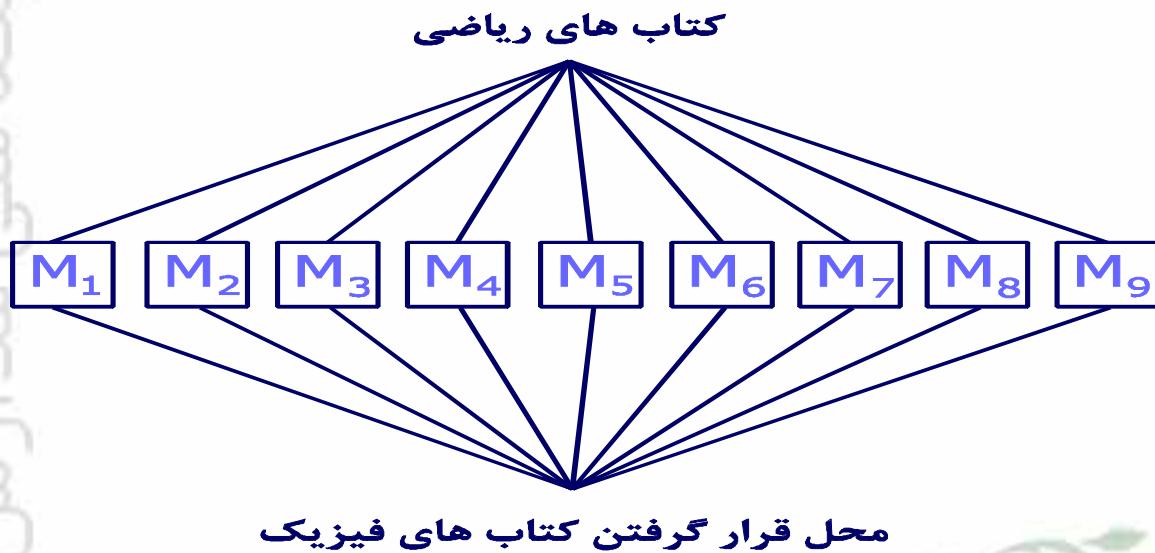
ج. برای حل این قسمت ابتدا کتاب‌های ریاضی را در قفسه می‌چینیم و سپس کتاب‌های فیزیک را بین

کتاب‌های ریاضی قرار می‌دهیم. به 9! حالت می‌توانیم کتاب‌های ریاضی را بچینیم، حال چون هر کتاب

فیزیک باید بین دو کتاب ریاضی باشد، بنابراین برای چیدن کتاب‌های فیزیک 8 جای خالی داریم. پس

به P_4^8 طریق می‌توانیم کتاب‌های فیزیک را بچینیم و بنابر اصل ضرب جواب‌های نهایی مسأله برابر

. $9! \times P_4^8$ است با:



د. ابتدا سه کتاب فیزیکی را که باید بین کتاب‌های M_1 و M_2 قرار بگیرند، به P_3^4 طریق می‌چینیم. خود

کتب M_1 و M_2 هم به دو طریق می‌توانند قرار بگیرند. حال چون می‌خواهیم این سه کتاب فیزیک و کتب

ریاضی M_1 و M_2 کنار هم قرار بگیرند. آنها را یک کتاب بزرگ مانند A در نظر می‌گیریم. حالا ۹ کتاب (۸)

کتاب دیگر و کتاب A را به $9!$ طریق در قفسه می‌چینیم. ولی خود کتاب A هم به $2 \times P_3^4$ طریق

می‌توانست چیده شود. پس جواب مسئله برابر است با: $9! \times 2 \times P_3^4$.

مثال. چند عدد فرد با ارقام متمایز بین ۳۰۰۰ و ۸۰۰۰ وجود دارد؟

حل. اعداد مطلوب را به شکل \overline{abcd} نمایش می‌دهیم. عدد a باید از مجموعه $\{7, 6, 5, 4, 3\}$ و عدد d از

مجموعه $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ انتخاب شوند. چون $\{3, 4, 5, 6, 7\} \cap \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{3, 5, 7\}$ ، مسئله را به دو قسمت زیر

تقسیم می‌کنیم.

حالت اول. $a \in \{3, 5, 7\}$

در این حالت برای انتخاب a ، ۳ حالت و برای انتخاب d نیز ۴ حالت (را بعد از a انتخاب می‌کنیم) و برای انتخاب

بقيه رقم‌ها نيز $P_2^{10-2} = P_2^8$ حالت وجود دارد. پس طبق اصل ضرب تعداد اين اعداد برابر است با

$$.3 \times 4 \times P_2^8 = 672$$

حالت دوم. $d \in \{4, 6\}$

در این حالت برای انتخاب a ، ۲ حالت و برای انتخاب d نیز ۵ حالت و برای انتخاب بقيه رقم‌ها

طريق وجود دارد. پس طبق اصل ضرب تعداد اين اعداد برابر است با $2 \times 5 \times P_2^8 = 560$

حال طبق اصل جمع تعداد کل اعداد برابر است با $1232 = 672 + 560$.

مثال. فرض کنید \mathbb{K} مجموعه اعدادی باشد که با ارقام متمایز از مجموعه $\{1, 2, 3, 4\}$ ساخته شده‌اند.

الف. S چند عضو دارد؟ $|S|$

ب. مجموع اعداد عضو S چقدر است؟ $\left(\sum_{x \in S} x = ? \right)$

حل.

الف. می‌دانیم تعداد اعداد i رقمی با ارقام متمایز که با ارقام 1 تا 4 ساخته شده‌اند برابر است با: P_i^4 . پس

طبق اصل جمع داریم:

$$|S| = P_1^4 + P_2^4 + P_3^4 + P_4^4 = 4 + 12 + 24 + 24 = 64$$

ب. اگر a مجموع رسمهای یکان، b مجموع رسمهای دهگان، c مجموع رسمهای صدگان و d مجموع رسمهای

هزارگان باشد. جواب مسئله برابر است با

$$1000 \times d + 100 \times c + 10 \times b + a$$

چون ارقام 1، 2، 3 و 4 هیچ تفاوتی با هم ندارند، پس تعداد اعدادی که رقم یکان آنها برابر 1 است برابر تعداد

اعدادی است که رقم یکان آنها برابر 2 است و همین طور برای رقم دهگان و

تعداد اعضای S رقم یکان دارند برابر است با $|S| = 64$. پس $a = \frac{64 \times (1+2+3+4)}{4} = 160$

تعداد اعضای S که رقم دهگان دارند برابر است با $P_2^4 + P_3^4 + P_4^4 = 60$ (اعداد دو، سه و چهار رقمی). پس

$b = \frac{60 \times 10}{4} = 150$. تعداد اعضای S که رقم صدگان دارند برابر است با $P_3^4 + P_4^4 = 48$ (اعداد سه و چهار رقمی).

$c = \frac{48 \times 10}{4} = 120$. تعداد اعضای S که رقم هزارگان دارند برابر است با $P_4^4 = 24$. پس

$$d = \frac{24 \times 10}{4} = 60$$

پس جواب مسئله برابر است با

$$\sum_{x \in S} x = 10^3 \times 60 + 10^2 \times 120 + 10 \times 150 + 160 = 73660$$

راه حل دیگر برای حل این مسئله این است که چون ارقام 1، 2، 3 و 4 با هم فرق دارند پس می‌توان فرض کرد که

هر یک از ارقام اعداد عضو S مقدارشان به طور متوسط $\frac{1+2+3+4}{4} = \frac{5}{2}$ است. پس می‌توان فرض کرد جای اعداد

یک رقمی $\frac{5}{2}$ و جای اعداد دو رقمی $\frac{55}{2}$ و جای اعداد سه رقمی $\frac{555}{2}$ و جای اعداد چهار رقمی $\frac{5555}{2}$ قرار داد. پس

$$\sum_{x \in S} x = P_1^4 \times \frac{5}{2} + P_2^4 \times \frac{55}{2} + P_3^4 \times \frac{555}{2} + P_4^4 \times \frac{5555}{2}$$

در حل این مسئله از ایده تقارن استفاده کردیم که یکی از ایده‌های اصلی حل مسائل شمارشی است.

مثال. با حروف کلمه wall، چند کلمه 4 حرفی می‌توان ساخت؟

حل. اگر دو حرف l، از یکدیگر متمایز بودند، جواب برابر با 4! بود؛ ولی دو حرف l، یکسان هستند، چه کار کنیم؟

فرض کنید دو حرف l به صورت l_1 و l_2 در نظر بگیریم. در نتیجه جواب برابر با 4! خواهد بود. ولی چون دو حرف l_1

و l_2 یکسان هستند، پس هر حالت را دو با شمرده‌ایم. به عنوان مثال آرایش‌های wal_1l_2 و wal_2l_1 هر دو کلمه wall را

$$\text{مشخص می‌کنند. بنابراین جواب برابر است با } \frac{4!}{2} = 12$$

توجه کنید این ایده که یک کمیت را بشماریم و بعد ببینیم هر حالت را چندبار حساب کرده‌ایم و با تقسیم تعداد

حالات شمرده شده بر تعداد دفعاتی که هر حالت را شمرده‌ایم؛ جواب مسأله را به دست آوریم، در حل خیلی از مسائل به ما کمک می‌کند.

جایگشت‌های با تکرار:

فرض کنید $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ باشد. در حالت کلی تعداد کلمات n حرفی را که با n_1 حرف a_1 , n_2 حرف

نشان می‌دهیم که این مقدار برابر است با $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$ و n_k حرف a_k ، می‌توان ساخت با نماد a_2

$$\cdot \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

زیرا فرض کنید تمام حروف متمایز باشند، در نتیجه ما $n!$ کلمه n حرفی می‌توانیم بسازیم، ولی به خاطر یکسان بودن حروف a_1 ، هر کلمه را $n_1!$ بار، به خاطر یکسان بودن حروف a_2 ، هر کلمه را $n_2!$ بار، ... و به خاطر یکسان بودن حروف a_k ، هر کلمه را $n_k!$ بار شمرده‌ایم. بنابراین طبق اصل ضرب هر کلمه را $n_1! n_2! \dots n_k!$ بار شمرده‌ایم. پس تعداد

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \quad \text{آرایش‌های کلمه مورد نظر برابر است با}$$

به عنوان مثال تعداد آرایش‌های کلمه *pepper* برابر است با $\frac{6!}{3!2!1!}$ یا تعداد آرایش‌های کلمه *massasauga*

$$\text{برابر است با } \frac{10!}{1!4!3!1!1!}$$

مثال. تعداد اعداد سه‌ رقمی بزرگتر از 530 که ارقام متمایزی دارند کدام است؟

336 هـ.

335 دـ.

345 جـ.

240 بـ.

الفـ. 201

حل . گزینه (د) صحیح است. ابتدا تعداد اعداد بزرگتر یا مساوی 600 را می‌شماریم و بعد تعداد اعداد بین 530 و

600 را. تعداد اعداد سه رقمی بزرگتر یا مساوی 600 با ارقام متمایز برابر است با $9 \times 8 = 288$. تعداد اعداد سه

رقمی بزرگتر یا مساوی با 530 و کوچک‌تر از 600 برابر است با $1 \times 6 \times 8 = 48$. پس تعداد اعداد سه رقمی یا مساوی با

530 با ارقام متمایز برابر است با $600 - 48 = 336$. حال چون عدد 530 نیز شمرده شده است جواب مسئله برابر است با

$$336 - 1 = 335$$

