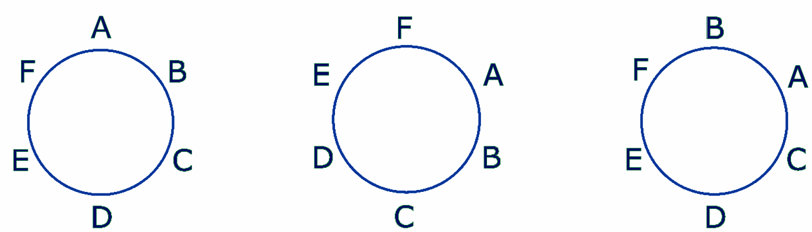
جایگشت‌های دوری

مثال. به چند طریق 6 نفر می‌توانند دور یک میز دایره‌ای بنشینند؟ (دقت کنید که در آرایشی که بـا دوران هم دیگر به دست آیند را یکسان حساب می‌کنیم، به عنوان مثال اگر 6 نفر را، با A, B, C, D, E, F نشان دهیم؛ آرایش شکل الف با آرایش شکل ب یکسان است ولی با آرایش شکل ج یکسان نیست)



الف ب ج

حل . روش اول. در حال مسائلی که شرایطی را گذاشته‌اند سعی می‌کنیم، این شـرایط را بـه نحـوی برطرف کنیم تا به مسائل ساده‌ای که می‌توانیم حل کنیم، تبدیل شوند. به عنوان نمونه در این مثـال، شـرط مسأله یکسان بودن دوجایگشتی است که با دوران میز به یکدیگر تبدیل می‌شوند. چون میـز را مـی‌تـوانیم دوران دهیم، پس می‌توان فرض کرد که A همواره بالای میز می‌نشیند. با ثابت نگـه‌داشـتن جـای A، شـرط دوران از بین می‌رود. حال 5 نفر داریم که می‌خواهیم آنها را در 5 جای خالی بنشانیم و در مثـال‌هـای قبـل دیدیم که این کار را به $5!$ طریق می‌توان انجام داد.

روش دوم. اگر شرط دوران را در نظر نگیریم، به $6!$ حالت می‌توان این شش نفر را دور میز نشاند. ولی هر 6 جایگشت خطی معادل یک جایگشت دورانی می‌باشند، به عنوان مثال جایگشت‌های خطی $ABCDEF$، $BCDEFA$، $CDEFAB$، $DEFABC$، $EFABCD$ و $FABCDE$، همگی یک جایگشت دوری را مشخص می‌کنند. پس جواب مسأله برابر است با $\frac{6!}{6} = 5!$.

در این مثال، دو روش برای حل مسائل دوراین یادگرفتیم. روش اول از بین بردن شرط دوران با استفاده از ثابت نگه‌داشتن یک نفر و روش دوم تبدیل جایگشت دوری به جایگشت خطی. در ایده‌ی اول فردی که جای آن را ثابت نگه‌داشتیم هر یک از افراد می‌توانست باشد و انتخاب این فرد به عهدهٔ ما می‌باشد.

مثال. به چند طریق می‌توان از بین 5 نفر، 3 نفر را دور یک میز دایره‌ای نشاند؟

حل. از ایدهٔ دوم استفاده می‌کنیم. اگر دوران را در نظر نگیریم، به P_3^5 طریق می‌توان سه نفر از بین پنج نفر را دور میز نشاند. ولی به دلیل دوران، هر حالت سه بار شمرده شده است، پس جواب برابر با $\frac{P_3^5}{3} = 20$ می‌باشد.

نکته. به طریق مشابه می‌توان ثابت کرد که از بین n نفر، k نفر $(k \le n)$ را به $\frac{P_k^n}{k}$ طریق می‌توان دور یک میز نشاند.

مثال. به چند طریق 7 نفر را می‌توان دور یک میز دایره‌ای 10 نفره، (میزی که 10 صندلی دارد) نشاند؟

حل. راه حل اول. اگر این 7 نفر را با $A_1, A_2, \mathbf{K}, A_7$ و صندلی‌ها را با $B_1, B_2, \mathbf{K}, B_{10}$ نشان دهیم، می‌توان فرض کرد که A_1 روی صندلی B_1 نشسته است. (زیرا در غیر این صورت می‌توانیم با چرخاندن میز صندلی فرد A_1 را به صندلی B_1 تبدیل کنیم.) حال با نشستن A_1 شرط دوران از بین رفته است و حالا 6 نفر دیگر داریم که باید روی 9 صندلی خالی بنشینند. در قسمت‌های قبل یاد گرفتیم که این افراد به P_6^9 طریق می‌توانند این کار را انجام دهند. پس جواب برابر است با P_6^9.

راه حل دوم. اگر دوران را در نظر نگیریم به P_7^{10} طریق می‌توانیم این 7 نفر را دور میز بنشانیم و چون هر حالت را 10 بار شمرده‌ایم (زیرا با دوران می‌توانیم از هر حالت، 10 حالت بسازیم)، بنابراین جواب برابر است با: $\dfrac{P_7^{10}}{10}$.

نکته. به طریق مشابه می‌توان ثابت کرد اگر بخواهیم n نفر را دور یک میزگرد m نفره $(m \geq n)$، بنشانیم؛ به $\dfrac{P_n^m}{m} = P_{n-1}^{m-1}$ طریق می‌توانیم این کار را بکنیم.

مثال. به چند طریق می‌توان با پنج‌مهرهٔ به رنگ‌های قرمز، سفید، سبز، آبی و زرد یک گردن‌بند ساخت؟

حل. در ساخت گردن‌بند اگر نمی‌توانستیم آن را برگردانیم، جواب برابر با !4 بود. ولی دو جایگشت $RWGBY$ و $RYBGW$ یک گردن‌بند را می‌سازند. (از برگرداندن یکدیگر به دست می‌آیند.) به طور مشابه چون هر حالت را دو بار شمرده‌ایم؛ جواب مسأله برابر است با $\dfrac{4!}{2}$.

نکته: به طور مشابه با $n \geq 3$ مهرهٔ مختلف، $\frac{(n-1)!}{2}$ گردن‌بند متفاوت می‌توان ساخت.

مثال . به چند طریق 9 ریاضی‌دان و 7 فیزیک‌دان می‌توانند دوریک میز گرد بنشینند، به طوری که

الف. هیچ شرطی وجود نداشته باشد.

ب. فیزیک‌دان P_1 کنار ریاضی‌دان M_1 ننشسته باشد.

ج. هیچ دو فیزیک‌دانی کنار یکدیگر ننشینند.

د. همهٔ فیزیک‌دان‌ها کنار یکدیگر نشسته باشند.

حل.

الف. چون $9 + 7 = 16$ نفر داریم؛ جواب برابر است با $15!$.

ب.

راه حل اول. ابتدا با نگه‌داشتن جای ریاضی‌دان M_1 شرط دوران را از بین می‌بریم. حال برای از بین بردن شرط کنار هم ننشستن M_1 و P_1، فیزیک‌دان P_1 را می‌نشانیم. فیزیک‌دان P_1 نمی‌تواند روی صندلی که ریاضی‌دان M_1 نشسته و دو صندلی مجاور آن بنشیند، بنابراین فیزیک‌دان P_1 به $16 - 3 = 13$ طریق می‌تواند بنشیند. حال 14 نفر دیگر به $14!$ طریق می‌توانند روی صندلی‌های باقی مانده بنشینند. پس طبق اصل ضرب جواب برابر است با $14! \times 13$.

دقت کنید در حل مسائلی که برای افراد یا اشیاء تعیین کرده‌اند، اول سعی کنید تا وضعیت آن افراد

یا اشیاء را مشخص کنید تا شرط مسأله از بین برود تا بتوانید باقی مسأله را به راحتی حل کنید. بــه عنــوان مثال، در این مثال ابتدا ریاضی‌دان M_1 و فیزیک‌دان P_1 را نشاندیم تا شــرط کنــار هــم ننشــستن P_1 و M_1 برطرف شود.

راه حل دوم (استفاده از اصل متمم). در این روش تعداد حالات مطلــوب را از تفریــق تعــداد حــالات نامطلوب از تعداد کل حالات به دست می‌آوریم. این روش حالت خاصی از اصل شمول و عدم شمول است که در فصل‌های آتی بررسی خواهد شد.

اگر شرط کنار هم ننشستن، M_1 و P_1 وجود نداشت به $15!$ طریق این 16 نفر می‌توانــستند دور میــز بنشینند. اما ببینیم تعداد حالات نامطلوب چند تاست؟ حالاتی که M_1 و P_1 کنار هم نشسته باشند، نامطلوب است. برای شمردن تعداد این حالات M_1 و P_1 را یک فرد واحد مثل A در نظر بگیرید؛

حال 15 نفر داریم که آنها را به $14!$ طریق می‌توان دور میز نشاند ولی خود A دو حالت دارد (P_1 سمت راست M_1 یا سمت چپ M_1 باشد.) بنابراین طبق اصل ضرب در $14! \times 2$ حالت، M_1 و P_1 مجاور یکدیگرنــد. بنابراین تعداد حالات مطلوب برابر است بــا: $15! - 2 \times 14! = 13 \times 14!$.

ج. ابتدا ریاضی‌دان‌ها را دور میز می‌نشانیم، به $8!$ طریق می‌توان ایــن کــار را انجــام داد. حــال بــین ریاضی‌دان‌ها 9 جا وجود دارد که باید فیزیک‌دان‌ها در 7 جا از آنها بنشینند. پس فیزیک‌دان‌ها هــم بــه P_4^9 طریق می‌توانند بنشینند. پس طبق اصل ضرب جواب مسأله برابر است با $8! \times P_7^9$.

د. تمام فیزیک‌دان‌ها را یک نفر مثلاً P، در نظر می‌گیریم. حالا 9 ریاضی‌دان و P، مثل 10 نفر هستند و آنها را به $9!$ حالت می‌توانیم دور میز بنشانیم ولی خود فیزیک‌دان‌ها می‌توانند به $7!$ حالت کنار یکدیگر بنشینند. بنابراین جواب برابر است با: $9!\times 7!$.

مثال . به چند طریق می‌توان n زوج را دور یک میز گرد نشاند به طوری که:

الف. مردها و زن‌ها یک در میان بنشینند.

ب. مردها و زن‌ها یک در میان بنشینند و هر زنی نیز کنار همسر خود نشسته باشد.

حل.

الف. ابتدا مردها را به $(n-1)!$ طریق دور میز می‌نشانیم. سپس بین هر دو مرد، یک زن می‌نشانیم که این کار به $n!$ طریق امکان دارد. پس طبق اصل ضرب، جواب مسأله برابر است با $n!(n-1)!$.

ب. ابتدا مردها را به $(n-1)!$ طریق دور میز می‌نشانیم. حال برای نشستن همسر هر مرد، دو طریق وجود دارد. (سمت چپ یا سمت راست شوهر خود بنشینند). پس به 2^n طریق هم می‌توان زن‌ها را دور میز نشاند. در نتیجه جواب نهایی برابر است با $(n-1)!\times 2^n$.