سایر مسائل جایگشت‌ها (تبدیل‌ها)

مثال . چند عدد از اعداد طبیعی 1 تا 1000 وجود دارند که ارقام تکراری دارند؟

حل. با استفاده از اصل متمم ، نخست تعداد اعداد طبیعی کوچکتر از 1000 که رقم تکراری ندارند را بدست آورده و از کل اعداد کم می‌کنیم. اما تعداد اعداد طبیعی کمتر از 1000 که رقم تکراری ندارند:

- اعداد طبیعی یک رقمی بدون رقم تکراری: 9
- اعداد طبیعی دو رقمی بدون رقم تکراری: $81 = 9 \times 9$

برای رقم دهگان 9 حالت داریم (اعداد 1 تا 9 بدون صفر)

و برای رقم یکان هم تنها عدد رقم دهگان را نمی‌توان استفاده کرد یعنی 9 حالت داریم.

- اعداد طبیعی 3 رقمی بدون رقم تکراری: حالت $648 = 8 \times 9 \times 9$

مانند قبل صدگان نمی‌تواند صفر بنشیند (9 حالت)

در دهگان تمام صفر تا نه بجز رقم صدگان می‌توانند بنشینند (9 حالت)

و در یکان تمام صفر تا نه به جز رقم صدگان و دهگان می‌توانند بنشینند (8 حالت)

پس کلاً $738 = 9 + 81 + 648$ عدد کمتر از 1000 بدون رقم تکراری داریم، پس تعداد اعدادی که رقم تکراری دارند برابر است با: $262 = 738 - 1000$

در اینجا می‌بایست به تعمیم فاکتوریل نیز بپردازیم.

تعریف می‌کنیم $0! = 1$ که اگر در فرمول تبدیل (جایگشت) به فاکتوریل صفر رسیدیم مشکلی نداشته

باشیم.

مثال . تعداد حالت‌هایی که می‌توان نام‌های شنبه، یک‌شنبه، دوشنبه، ... ، پنج‌شنبه و جمعه را به روزهای هفته (7 روز) داد چندتا است.

حل . با استفاده از فرمول ترتیب داریم:

$$P_7^7 = \frac{7!}{(7-7)!} = \frac{7!}{0!} = 7!$$

نکته. برای یادآوری باید گفت که P_m^n را به صورت $P\ (n\ ,\ m)$ نیز نمایش می‌دهند:

$$P(n,m) = P_m^n = \frac{n!}{(n-m)!}$$

مثال. ثابت کنید

الف. $P(n\ ,\ n) = P\ (n\ ,\ n-1)$

ب. $P(n\ ,\ 1) + P(m\ ,\ 1) = P(n+m\ ,\ 1)$

حل .

الف.

$$P(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

$$P(n,n-1) = \frac{n!}{(n-(n-1))!} = \frac{n!}{1!} = n!$$

$$\Rightarrow P(n,n) = P(n,n-1)$$

یا

$$P_n^n = P_{n-1}^n$$

شهود این مطلب نیز به این صورت است که P_{n-1}^n یعنی $n-1$ نفر با لحاظ ترتیب از n نفر انتخاب شوند، که تنها فرد باقیمانده تنها حالت برای انتخاب نفر بعد یعنی نفر nام است. پس به ازای هر حالت انتخاب با ترتیب $n-1$ نفر تنها یک حالت از انتخاب n نفر داریم و بالعکس پس $P_{n-1}^n = P_n^n$

ب.

$$P(n,1) = \frac{n!}{(n-1)!} = n \qquad , \qquad P(m,1) = \frac{m!}{(m-1)!} = m$$
$$P(n+m,1) = \frac{(n+m)!}{(n+m-1)!} = n+m \quad \Rightarrow P_1^n + P_1^m = P_1^{m+n}$$

و اما اکنون می‌خواهیم به مسالهٔ جالب دیگری بپردازیم.

مثال. چند نوع تاسی داریم؟ (تاسی به مکعبی می‌گویند که وجه‌های آن از **1** تا **6** به گونه‌ای شماره‌گذاری شده‌اند که مجموع اعداد وجوه مقابل عدد 7 بشود)

(دقت کنید تاسی‌هایی که از دوران یکدیگر در فضا بدست بیایند یکسان می‌باشند)

راه حل **1** . تاسی را روی صفحه به صورت روبرو باز می‌کنیم واضح است که وجوه A با A^1 و B با B^1 و C با C^1 مقابل می‌باشند.

نخست بدون در نظر گرفتن دوران تاس تعداد کل حالات عدد دهی به این وجوه را می‌شماریم.

چون سه جفت (**1** و **6**) و (**3** و **4**) و (**2** و **5**) وجود دارند که مجموع 7 داشته باشند. پس برای اختصاص این اعداد به وجوه A، A^1، ... ، C^1 به تعداد $3!$ حالت انتخاب برای نسبت دادن جفت‌ها به وجوه مقابل و برای

هر دو وجه مقابل دو حالت داریم زیرا اگر به A و A^1، (6 و 1) را نسبت دهیم دو حالت داریـم: $A = 1$ و A^1 =6 یا $A = 6$ و $A^1 = 1$ پس در کل $3! \times 2^3$ حالت داریم.

حال تعداد حالات تکراری‌ای که به ازای هر حالت شمرده‌ایم را بدست می‌آوریم. اولاً به ازای هر آرایش بازکردن تاسی بر روی صفحۀ 6 انتخاب برای وجهی که مرکز بازکردن می‌باشد (در این مثال وجه B) داریم، و برای آنکه در کدام جهت آن وجه، دو وجه به هم متصل شده باشند (در این مثال جهت بالا که وجوه C^1 و B^1 به هم وصلند) نیز چهار حالت داریم.

پس به ازای هر تاسی ما 6×4 حالت یکسان را شمرده‌ایم پس تعداد کل بدست آمده را تقسیم بر این تعداد کرده و داریم:

$$\frac{3! \times 2^3}{6 \times 4} = 2$$

یعنی کلاً 2 نوع تاسی داریم.

راه حل 2. **این راه که نیاز به درک فضاییِ خوبی دارد ، کوتاهتر و زیباتر است . اولاً می‌دانـیم یکـی از وجوه حتماً 1 است.پس تاسی را به قسمی روی میز می‌گذاریم که وجه 1 به زمین چسبیده و وجه 6 رو به بالا باشد:**

حال می‌دانیم یکی از چهار وجه کناری حتماً 2 و مقابل آن 5 است. پس در همین وضعیت تاسـی را در جهت حرکت ساعت آنقدر می‌چرخانیم تا وجه 2 روبروی ما قرار گیرد .

اکنون برای وجه‌های چپ و راست دو حالت داریم یا سمت راست 3 و چپ 4 باشد و یا بالعکس پس کل

تعداد تاس‌های ممکن به صورت زیر می‌باشد

مثال. به چند طریق می‌توان چهار مرد و چهار زن را دور یک میز نشاند به قسمی که هیچ دومردی در دوصندلی مجاور قرار نگیرند؟!

راه حل 1. فرض کنیم میزیک خط راست باشد، برای شروع از سمت چپ نخست دو حالت داریم که با مرد یا زن شروع شود و فرض کنیم سمت چپ‌ترین فرد مرد باشد

اگر مربع نشان‌دهندهٔ مرد و خط نشان‌دهندهٔ زن باشد واضح است $4!$ برای مردها و $4!$ حالت برای زن‌ها داریم. پس کلاً به $2 \times 4! \times 4!$ حالت می‌توانند در یک خط راست بنشینند. حال اگر ما این خط راست را به دایره تبدیل کنیم به ازای هر حالت 8 حالت تکراری داریم (چرا؟) پس کلاً $\frac{4!\times 4!\times 2}{8} = 4!\times 3!$ حالت داریم.

راه حل 2. اگر مرد شمارهٔ 1 را در نظر بگیریم، می‌دانیم حتماً در یک جای دایره نشسته، دایره را آنقدر می‌چرخانیم تا مرد 1 به سمت چپ بیاید.

واضح است برای انتخاب 3 مرد دیگر $3!$ حالت و برای انتخاب محل نشستن چهار زن $4!$ حالت داریم پس کلاً $3! \times 4!$ حالت داریم.

مثال . 10 همکلاسی را در نظر بگیرید که دوتا از آنها به تازگی باهم قهر کرده‌اند! به چند طریق این 10 نفر می توانند دور یک میز دایره‌ای بنشینند به قسمی که دونفری که با هم قهر کرده‌اند کنار هم نباشند.

حل. تعداد حالاتی که این دو نفر کنار هم باشند را شمرده و از کل حالات کم می‌کنیم.

در حالاتی که این دو نفر کنار هم باشند، آن دو را یک بسته می‌نامیم و می‌دانیم این بسته و 8 نفر دیگر به $8!$ طریق می‌توانند دور میز قرار گیرند حال در این بسته نیز 2 حالت داریم، یا نفر اول در سمت راست بنشیند یا نفر دوم آن بسته. پس کلاً به $8! \times 2$ حالت این دو نفر می‌توانند کنار هم بنشینند پس تعداد طرقی که این 10 همکلاسی دورمیز می‌توانند بنشینند که این دو کنار هم بناشند برابر است با: $10! - 2 \times 8!$