ترکیب

مثال. تعداد زیر مجموعه های 3 عضوی مجموعه ی

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ چقدر است؟

حل. مجموعه A، 10 زیر مجموعه ی 3 عضوی دارد. در زیر این مجموعه ها مشخص شده اند.

$\{1، 3، 5\}$، $\{1، 3، 4\}$، $\{1، 2، 5\}$، $\{1، 2، 4\}$، $\{1، 2، 3\}$، $\{3، 4، 5\}$

$\{2، 5،4\}$، $\{2، 3، 5\}$، $\{2، 3، 4\}$، $\{1، 4، 5\}$

در حالت کلی تعداد زیر مجموعه های k عضوی یک مجموعه ی n عضوی را با نماد $\binom{n}{k}$ یا C_k^n نشان می دهند. می خواهیم مقدار $\binom{n}{k}$ را محاسبه کنیم. باز سراغ آشنای قدیمی خودمان می رویم. اگر ترتیب در انتخاب عناصر مهم بود، جواب برابر با P_k^n بود. ولی ترتیب مهم نیست بنابراین هر حالت را $k!$ بار شمرده این. پس،

$$\binom{n}{k} = \frac{p_k^n}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

مثال. ثابت کنید حاصل ضرب هر k عدد طبیعی متوالی بر $k!$ بخش پذیر است.

حل. فرض کنید بزرگ ترین عدد در بین این k عدد، n باشد. پس می خواهیم ثابت کنیم $\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$ یک عدد صحیح است. می دانیم $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$ و

چون $\binom{n}{k}$ تعداد زیر مجموعه های k عضوی یک مجموعه ی n عضوی است پس $\binom{n}{k}$ یک عــدد صــحیح است. در نتیجه حاصل ضرب هر k عدد صحیح متوالی بر $k!$ بخش پذیر است.

مثال. از بین 10 دانش آموز کلاس اولی و 7 دانش آموز کلاس دومی، به چند طریــق مــی تــوان 4 دانش آموز را برای تیم والیبال انتخاب کرد به طوری که:

الف. هیچ شرطی وجود نداشته باشد.

ب. دقیقاً 2 دانش آموز کلاس دومی انتخاب شده باشد.

ج. حداقل 3 دانش آموز کلاس اولی انتخاب شده باشد.

د. دانش آموز کلاس اولی A و دانش آموز کلاس دومی B، با هم انتخاب نشده باشند.

حل.

الف. چون ترتیب مهم نیست، جواب برابر است با $\binom{17}{4}$.

ب. به $\binom{7}{2}$ طریق 2 دانش آموز کلاس دومی و به $\binom{10}{2}$ طریق، 2 دانش آموز کلاس اولــی را می توان انتخاب کرد. بنابراین جواب برابر است با $\binom{10}{2}\binom{7}{2}$.

ج. چون مجموعاً باید 4 دانش آموز انتخاب کرد، مسأله را به دو قسمت زیر تقسیم می کنیم.

- 3 دانش آموز کلاس اولی و یک دانش آموز کلاس دومی انتخاب شده باشد. شبیه قسمت ب، جواب برابر است با $7\binom{10}{3}$.

- 4 دانش آموز کلاس اولی انتخاب شده باشد. شبیه قسمت ب، جواب برابر است با $\binom{10}{4}$.

بنابراین طبق اصل جمع جواب برابر است با $7\binom{10}{3}+\binom{10}{4}$.

د. راه حل اول. مسأله را از طریق کم کردن تعداد حالات نامطلوب از تعداد کل حالات حل می کنیم. تعداد کل حالات برابر است با $\binom{17}{4}$. حالات نامطلوب حالاتی است که A و B هر دو انتخاب شده باشند. بنابراین تعداد حالات نامطلوب برابر با تعداد حالات انتخاب 2 نفر از 15 نفر باقی مانده یعنی $\binom{15}{2}$ است. پس جواب برابر است با: $\binom{17}{4}-\binom{15}{2}$.

راه حل دوم. مسأله را با تقسیم به سه حالت زیر حل می کنیم.

- A انتخاب شده باشد ولی B انتخاب نشده باشد. $\left(\binom{15}{3}\right)$
- A انتخاب نشده باشد ولی B انتخاب شده باشد. $\left(\binom{15}{3}\right)$
- A و B، هیچ کدام انتخاب نشده باشند. $\left(\binom{15}{4}\right)$

پس طبق اصل جمع، جواب مسأله برابر است با $2\binom{15}{3}+\binom{15}{4}$.

مثال.

الف. چند دنباله ی دودویی به طول $n + m$ با m تا 0 و n تا 1 می توان ساخت؟

ب. در چند تا از دنباله های قسمت الف، هیچ دو «1» ای مجاور نیستند؟

حل.

الف. برای ساختن این دنباله $m+n$ جای خالی داریم که در m جای آنها **0** و در بقیه «**1**» آمده است. جای **0** را به $\binom{m+n}{m}$ طریق می توان انتخاب کرد. سپس در n خانه ی باقی مانده «**1**» قرار می دهیم. پس تعداد دنباله های مورد نظر برابر است با $\binom{m+n}{m}$.

ب. ابتدا **0** ها را قرار می دهیم. این کار به یک طریق امکان دارد. حال «**1**» ها را باید بین **0** ها قرار داد. $m+1$ جای خالی داریم که باید n تای آنها انتخاب شود تا در آنها «**1**» قرار دهیم. این کار به $\binom{m+1}{n}$ طریق امکان دارد. پس دنباله های مورد نظر برابر است با $\binom{m+1}{n}$.

مثال. **5** نقطه روی قطر یک نیم دایره و **10** نقطه ی دیگر روی کمان آن قرار دارد (نقاط روی گوشه ها قرار ندارند).

الف. تعداد خطوط راستی که از حداقل دو نقطه از این نقاط می گذرند را پیدا کنید.

ب. تعداد مثلث هایی را که رئوس آنها این نقاط هستند بیابید.

حل.

الف. اگر هیچ سه نقطه ای که از این **15** نقطه انتخاب کنیم، یک مثلث ساخته می شود مگر وقتی که هر سه نقطه بر یک استقامت باشند. پس جواب مسأله برابر است با $\binom{15}{3}-\binom{5}{3}=455-10=445$.

مثال. یک معلم ورزش می خواهد20 دانش آموزش را به 4 تیم 5 نفری برای تمرین فوتبال تقسیم کند، این معلم به چند طریق می تواند این کار را انجام دهد؟

حل. این 20 نفر به !20 طریق می توانند به صف بایستند. حال 5 نفر اول تیم فوتبال شماره ی 1، 5 نفر دوم تیم فوتبال شماره ی 2، ... و 5 نفر آخر تیم فوتبال شماره ی 4 را مشخص می کنند. چــون در هر تیمی ترتیب ایستادن افراد مهم نیست، پس به ازای هر تیمی هر حالت را !5 بار شمرده ایم. از طــرف دیگر چون اسم تیم ها مهم نیست، پس هر حالت را !4 بار شمرده ایم. (تیم های فوتبال به !4 طریق مــی توانند اسم های خود را با هم عوض کنند.) بنابراین طبق اصل ضرب هر حالت را $4!\times(5!)^4$ بار شمرده ایم، پس جواب برابر است با $\frac{20!}{4!\times(5!)^4}$.

مثال. اگر A یک مجموعه ی na عضوی باشد، به چند طریق مجموعه ی A را می توان بــه n زیــر مجموعه ی a عضوی افراز کرد؟

حل. روش اول. ابتدا عضو دلخواه $x\in A$ را در نظر می گیریم، تعداد راه های انتخاب عناصری کــه با x در یک زیر مجموعه قرار دارند برابر است با $\binom{na-1}{a-1}$. حال از بین $(n-1)a$ عضو بــاقی مانــده، یــک عضو دلخواه مانند y را در نظر می گیریم، تعداد راه های انتخاب عناصری که با y در یــک زیــر مجموعــه قرار دارند برابر است با $\binom{(n-1)a-1}{a-1}$ و ... . بنابراین طبق اصل ضرب جواب برابر است با:

$$\binom{na-1}{a-1}\binom{(n-1)a-1}{a-1}\cdots\binom{a-1}{a-1}$$

روش دوم. می دانیم تعداد راه های قرار دادن n شیء داخل k جعبه، به طوری که، داخل جعبه ی اول، n_1 شیء، داخل جعبه ی دوم، n_2 شیء ... و داخل جعبه ی k ام، n_k شیء قرار گیرید $(n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k)$؛ برابر است با $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$.

بنابراین اگر ترتیب انتخاب زیر مجموعه ها مهم باشد جواب برابر است با $\frac{(na)!}{(a!)^n}$. ولی چون زیر مجموعه ها فرقی ندارند، پس هر حالت را $n!$ بار شمرده ایم. بنابراین جواب برابر است با $\frac{(na)!}{n!(a!)^n}$.

مثال. یک معلم ورزش می خواهد کلاس 42 نفری خود را به پنج تیم 6 نفره برای والیبال و 6 تیم 2 نفری برای پینگ پنگ تقسیم کند. این معلم به چند طریق می تواند دانش آموزان خود را تقسیم کند؟

حل. این 42 نفر به !42 طریق می توانند به صف بایستند. حال 6 نفر اول تیم والیبال شماره ی 1، 6 نفر دوم تیم والیبال شماره ی 2 ، ... و 6 نفر پنجم تیم والیبال شماره ی 5، نفرات 31 ام و 32 ام تیم پینگ پنگ شماره ی 1، نفرات 33 ام و 34 ام تیم پینگ پنگ شماره ی 2، ... و دو نفر آخر تیم پینگ پنگ شماره ی 6 را مشخص می کنند. چون در هر تیمی ترتیب ایستادن افراد مهم نیست، پس به ازای هر تیم والیبال هر حالت را !6 بار و به ازای هر تیم پینگ پنگ هر حالت را !2 بار شمرده ایم. از طرف دیگر چون اسم تیم های والیبال و اسم تیم های پینگ پنگ مهم نیست، پس به ازای تیم های والیبال هر حالت را !5 بار و به ازای تیم های پینگ پنگ هر حالت را !6 بار شمرده ایم. (تیم های والیبال به !5 طریق و تیم های پینگ پنگ هم به !6 طریق، می توانند اسم های خود را با هم عوض کنند.) بنابراین طبق اصل ضرب هر حالت را $5!\times(6!)^5\times 6!\times 2!^6$ بار شمرده ایم، پس جواب برابر است با $\frac{32!}{5!\times 6!\times(6!)^5\times 2^6}$.

مثال. اگر A یک مجموعه n عضوی باشد، به چند طریق می توان مجموعه ی A را به n_1 زیر مجموعه ی a_1 عضوی، n_2 زیر مجموعه ی a_2 عضوی، ... و n_k زیر مجموعه ی a_k عضوی افراز کرد؟

(دقت کنید که $n = n_1a_1 + n_2a_2 + \ldots + n_ka_k$ ها دو به دو متمایزند.)

حل.

روش اول. ابتدا n عضو را در یک ردیف قرار می دهیم. سپس عضوهای اول تا a_1 را در زیر مجموعه ی اول، عضوهای a_1+1 تا $2a_1$ را در زی مجموعه ی دوم، ...، عضوهای $(n_1-1)a_1+1$ تا n_1a_1 را در زیر مجموعه ی n_1 ام، عضوهای n_1a_1+1 تا $n_1a_1+a_2$ را در مجموعه ی n_1+1 ام، ... و عضوهای $n-a_k+1$ تا n ام را در مجموعه ی $n_1+n_2+\ldots+n_k$ ام قرار می دهیم.

برای این کار $n!$ راه داریم. اما از طرفی مکان اعضا در هر زیر مجموعه نیز مهم نیست. بنابراین هر حالت را $(a_1!)^{n_1}(a_2!)^{n_2}\ldots(a_k!)^{n_k}$ بار شمرده ایم. از طرف دیگر مکان زیر مجموعه های اول تا n_1 ام، مکان زیر مجموعه های n_1+1 تا n_1+n_2 ام، ... و مکان زیر مجموعه های $n_1+n_2+\ldots+n_{k-1}+1$ بار دیگر هم شمرده ایم. بنابراین جواب برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!(a_1!)^{n_1}(a_2!)^{n_2}\ldots(a_k!)^{n_k}}$$

روش دوم. ابتدا A را به k زیر مجموعه ی n_1a_1، n_2a_2، ... و n_ka_k عضوی افراز می کنیم. (در این افراز مجموعه ها متفاوت هستند و شماره دارند.) این کار را به $\frac{n!}{(n_1a_1)!(n_2a_2)!\ldots(n_ka_k)!}$ طریق می توان انجام داد. حال مجموعه ی اول را به n_1 زیر مجموعه a_1 عضوی، مجموعه ی دوم را به n_2 زیر مجموعه ی a_2 عضوی، ... و مجموعه ی k ام را به n_k زیر مجموعه ی a_k عضوی افراز می کنیم. در مثال

قبل دیدید که تعداد راه های افراز یک مجموعه ی na عضوی به n زیر مجموعه ی a عضوی برابر است

با $\frac{(na)!}{n!(a!)^n}$. بنابراین طبق اصل ضرب جواب مسأله برابر است با:

$$\frac{n!}{(n_1a_1)!(n_2a_2)!\dots(n_ka_k)!}\times\frac{(n_1a_1)!}{n_1!(a_1)!^{n_1}}\times\frac{(n_2a_2)!}{n_2!(a_2)!^{n_2}}\times\dots\frac{(n_ka_k)!}{n_k!(a_k)!^{n_k}}$$

$$=\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!(a_1!)^{n_1}(a_2!)^{n_2}\dots(a_k!)^{n_k}}$$

مثال. ثابت کنید به ازای هر مقدار طبیعی n، عدد

$(n+1)(n+2)\dots(2n)$ بر 2^n بخش پذیر است

حل. برای اثبات مسأله ی فوق، کافی است ثابت کنیم $\frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{2^n}$، جواب یک مسأله‌ی شمارشی است.

می دانیم تعداد راه های افراز $2n$ نفر به n تیم 2 نفر برابر است

با $\frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{2^n}=\frac{(2n)!}{n!\times2^n}$. حال چون جواب هر مسأله ی شمارشی صحیح است،پس

$(n+1)(n+2)\dots(2n)$ بر 2^n بخش پذیر است.