مثلث خیام پاسکال

می‌خواهیم ضریب $x^k y^{n-k}$ را در بسط $(x+y)^n$ بدست بیاوریم.

همان‌طور که می‌دانیم:

$$(x+y)^n = \overbrace{(x+y)(x+y)\times \cdots \times(x+y)}$$

که از هر پرانتز x یا y انتخاب می‌شود و در بقیه ضرب می‌شود.

حال ضریب $x^k y^{n-k}$ یعنی تعداد حالاتی که از k پرانتز x و از $(n-k)$ پرانتز دیگر y انتخاب شود و این یعنی $\binom{n}{k}$. پس ضریب جملهٔ $x^k x^{n-k}$ در بسط فوق $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ می‌باشد.

یاد آوری. انتخاب k از n که با $\binom{n}{k}$ نشان می‌دهند با $C(n\ ,\ k)$ و C_k^n نیز نمایش می‌دهند.

$$C_k^n = C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

مثال . ضریب x^3 در بسط $(x-1)^{10}$ چند می‌باشد.

حل. چون $y = -1$ می‌باشد، و ضریب $x^3 y^7$ برابر با $\binom{10}{3}$ است از طرفی $y^7 = -1$ پس ضریب x^3 برابر است با $\binom{10}{3} y^7 = -\binom{10}{3}$

نتیجه. بسط $(x-1)^n$ و $(x+1)^n$ را بدست بیاورید.

با استدلالی مشابه به روشنی داریم:

$$(x-1)^n = \binom{n}{n}x^n - \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n-2}x^{n-2} - \cdots + (-1)^n x^0$$
$$(x+1)^n = \binom{n}{n}x^n + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n-2}x^{n-2} + \cdots + nx^1 + x^0$$

مثلث خیام پاسکال:

اگر ضرایب x^k در بسط دوجمله‌ای $(x+1)^n$ بر حسب مقادیر صعودی n فهرست شوند به ترتیب زیبای زیر می‌رسیم :

x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	
1								$(x+1)^0$
1	1							$(x+1)^1$
1	2	1						$(x+1)^2$
1	3	3	1					$(x+1)^3$
1	4	6	4	1				$(x+1)^4$
1	5	10	10	5	1			$(x+1)^5$
1	6	15	20	15	6	1		$(x+1)^6$
1	7	21	35	35	21	7	1	$(x+1)^7$

که این را الگوی مثلثی خیام _ پاسکال می‌نامند. این الگو علاوه بر نشان دادن ضـریب x^k در $(x+y)^n$، دارای

خواص جالبی است که آن را با ارزش نموده است.

1. تقارن. علت تقارن سطری هر سطر در آن است که ضریب x^k در $(x+y)^n$ معرف $\binom{n}{k}$ می‌باشد و از طرفی $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ پس ضریب x^k و x^{n-k} یکسان می‌باشد.

2. درایهٔ سطر m ام و ستون l ام معرف $\binom{m}{l}$ می‌باشد که توضیح داده شد.

قضیه . $\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}$

اثبات . یک روش اثبات آن از طریق محاسبات ریاضی و رسیدن از یک طرف به طرف دیگر است ولیکن اثبات دیگر آن که زیباتر است و بعداً مفصلاً توضیح داده می‌شود را به اختصار بیان می‌کنیم. $\binom{n}{r}$ معرف تعداد زیر مجموعه‌های r عضوی از مجموعهٔ اعداد 1 تا n است که برای انتخاب زیر مجموعه‌های r عضوی می‌توان به این صورت عمل کرد که عدد 1 را در نظر می‌گیریم تعداد زیر مجموعه‌های r عضوی‌ای که این عدد را ندارند برابر است با $\binom{n-1}{r}$ و تعداد زیرمجموعه‌هایی هم که این عدد را دارند، برابر است با $\binom{n-1}{r-1}$، (چرا؟) پس $\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}$

3. چون ثابت کردیم $\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}$ نشان داده می‌شود که این مثلث خیام پاسکال به راحتی ساخته می‌شود زیرا هر عنصر آن بجز ستون اول که همگی 1 می‌باشند، برابر است با مجموع عنصر سطر قبل آن در همین ستون با عنصر سطر قبل در ستون قبل به شکل دقت کنید.

مثلاً اگر بخواهیم سطر هفتم آن را از روی همین اعداد بدست آوریم، به ترتیب داریم:

1 و $1+5=6$ و $5+10=15$ و $10+10=20$ و $10+5=15$ و $5+1=6$ و 1

خیام ریاضی‌دان بزرگ ایرانی و پاسکال دانشمند بزرگ ریاضی و کامپیوتر هر یک جداگانه برای اولین بـار ایـن مثلث را معرفی و از آن استفاده نموده‌اند. به همین خاطر به نام این دو ثبت شده است.

قضیه . ثابت کنید

الف. $C(n,0)+C(n,1)+C(n,2)+\cdots+C(n,n)=2^n$

ب. $C(n,0)-C(n,1)+C(n,2)-\cdots+(-1)^n C(n,n)=0$

اثبات . اگر در بسط $(x+y)^n$ قرار دهیم $x=1$ و $y=1$ داریم

$$2^n=(1+1)^n=\binom{n}{0}1+\binom{n}{1}1+\cdots+\binom{n}{n}$$

و اگر در بسط $(x+y)^n$ قرار دهیم $x=1$ و $y=1$ داریم:

$$0^n=(-1+1)^n=\binom{n}{0}1^n+\binom{n}{1}1^{n-1}+\binom{n}{2}1^{n-2}(-1)^2+\cdots+\binom{n}{n}1^{0}(-1)^n$$
$$=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}$$