ترکیب با تکرار

در فصل قبل دیدیم وقتی بخواهیم از بین n شی، k شی را با ترتیب انتخاب کنیم (از هر شی حداکثر یکی می توان برداشت)، به P_k^n طریق می توانیم این کار را بکنیم. همچنین اگر بخواهیم از بین n شی، k شی را بدون ترتیب انتخاب کنیم (از هر شی حداکثر یکی را می توان انتخاب کرد)، به $\binom{n}{k}$ طریق می توانیم این کار را بکنیم. همچنین اگر بخواهیم از بین n نوع شی، k شی را با ترتیب انتخاب کنیم (از هر نوع شی می توان هر تعدادی انتخاب کرد)، به n^k طریق می توانیم این کار را انجام دهیم. ولی سوالی که پیش می آید این است که اگر بخواهیم از بین n نوع شی، k شی را بدون ترتیب انتخاب کنیم (از هر نوع شی می توان هر تعدادی انتخاب کرد)، به چند راه می توانیم این کار را انجام دهیم.

مثال. یک مادر به چند طریق می تواند 7 عدد سیب را بین 4 فرزندش تقسیم کند؟ (می تواند به یک یا چند نفر از فرزندان اصلاً سیبی ندهد.)

حل. اگر تعداد سیب هایی را که فرزند اول می گیرد با x_1، تعداد سیب هایی را که فرزند دوم می گیرد با x_2، تعداد سیب هایی را که فرزند سوم می گیرد با x_3 و تعداد سیب هایی را که فرزند چهارم می گیرد با x_4 نشان دهیم، جواب مسئله برابر است با تعداد جواب های صحیح نامنفی معادله ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$.

ردیف	x_1	x_2	x_3	x_4	ستون ب
1	2	2	2	1	$xx\vert xx\vert xx\vert x$
2	4	1	1	1	$xxxx\vert x\vert x\vert x$
3	6	0	0	1	$xxxxxx\vert\vert\vert x$
4	0	1	2	4	$\vert x\vert xx\vert xxxx$
5	0	0	5	2	$\vert\vert xxxxx\vert xx$
6	0	0	7	0	$\vert\vert xxxxxxx\vert$
7	0	0	0	7	$\vert\vert\vert xxxxxxx$

حال بیایید معادله ی بالا را حل کنیم. اگر هر سیب را با x نشان دهیم و تعداد x های قبل از خط اول را با x_1، تعداد x های بین خط اول و دوم را با خط x_2، تعداد x های بین خط دوم و سوم را با x_3 و تعداد x های بعد از خط سوم را با x_4 نشان دهیم، یک تناظر یک به یک بین جواب های معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4=7$ و تعداد آرایش هایی که با 7 علامت x و 3 علامت | می توان ساخت برقرار می شود. به عنوان مثال $xxxxx\vert x\vert\vert x$ نشان دهنده ی جواب $x_1=5, x_2=1, x_3=0, x_4=1$ است.

ولی می دانیم تعداد آرایش هایی که با 7 تا x و 3 تا | ساخته می شود برابر است با $\frac{10!}{3!7!}=\binom{10}{7}=\binom{10}{3}$.

پس مسئله حل شد.

نکته. به طریق مشابه می توانید ثابت کنید تعداد جواب های صحیح نامنفی معادله ی $x_1+x_2+\ldots+x_n=m$، برابر است با تعداد آرایش های m تا x و $n-1$ تا |، یعنی برابر است با $\binom{m+n-1}{n-1}=\binom{m+n-1}{m}$.

مثال. یک پدر به چند طریق می تواند 10 دلار به 3 فرزندش عیدی دهد، به طوری که به هر فرزندش حداقل یک دلار بدهد؟ (این 10 دلار به صورت اسکناس های یک دلاری هستند.)

حل. باز با کمی فکر می توانید بفهمید که جواب مسئله برابر با تعداد جواب های صحیح معادله ی $x_1+x_2+x_3=10$ است به شرط این که $x_1,x_2,x_3\geq 1$ باشد.

حال باید مسئله را به فرم آشنای خودمان تبدیل کنیم. یعنی به صورت $y_1+y_2+y_3=n$ به طوری که $y_i\geq 0$ باشد. برای این کار تعریف می کنیم:

$$y_1=x_1-1, y_2=x_2-1, y_3=x_3-1$$

در نتیجه یک تناظر یک به یک بین مسئله ی اصلی و تعداد جواب های معادله ی $y_1+y_2+y_3=7$ برقرار می شود، پس جواب برابر است با $\binom{9}{7}=\binom{9}{2}$.

مثال. تعداد دسته جواب های طبیعی معادله ی زیر را بیابید.

$$(x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2+y_3+y_4)=77$$

حل. فرض کنید $x_1+x_2+x_3=m$ و $y_1+y_2+y_3+y_4=n$ باشد. چون x_i ها و y_i ها طبیعی هستند پس $m\geq 3$ و $n\geq 4$. در این صورت معادله ی $mn=77$ تنها دو جواب ($m=7, n=11$ و $m=11, n=7$) دارد.

- $x_1+x_2+x_3=7$ و $y_1+y_2+y_3+y_4=11$. تعداد جواب های طبیعی $x_1+x_2+x_3=7$ برابر است با $\binom{6}{2}$ و تعداد جواب های طبیعی $y_1+y_2+y_3+y_4=11$ برابر است با $\binom{10}{3}$. پس طبق اصل ضرب تعداد جواب های معادله ی مورد نظر در این حالت برابر است با $\binom{6}{2}\binom{10}{3}$.

- $x_1+x_2+x_3=11$ و $y_1+y_2+y_3+y_4=7$. تعداد جواب های طبیعی $x_1+x_2+x_3=11$ برابر است با $\binom{10}{2}$ و تعداد جواب های طبیعی $y_1+y_2+y_3+y_4=7$ برابر است با $\binom{6}{3}$. پس طبق اصل ضرب تعداد جواب های معادله ی مورد نظر در این حالت برابر است با $\binom{10}{2}\binom{6}{3}$.

پس طبق اصل جمع تعداد جواب های معادله ی مورد نظر برابر است با $\binom{10}{2}\binom{6}{3}+\binom{6}{2}\binom{10}{3}$

مثال. تعداد جواب های صحیح نامنفی نامعادله ی $x_1+x_2+\dots+x_n\le m$ را بیابید.

حل. باز باید مسئله را به مسئله ای تبدیل کنیم که قابل حل باشد. برای این کار فرض کنید $a_1,a_2,\dots,a_n$ یک جواب نامعادله ی $x_1+x_2+\dots+x_n\le m$ و $b=m-(a_1+a_2+\dots+a_n)\ge 0$ باشد. در نتیجه $a_1,a_2,\dots,a_m,b$ نیز یک جواب معادله ی $x_1+x_2+\dots+x_n+y=m$ با شرط $x_1,x_2,\dots,x_n,y\ge 0$ است و هر جواب معادله ی فوق هم متناظر با

یک جواب نامعادله ی مورد نظر است. ولی تعداد جواب های صحیح نامنفی معادله ی $x_1+x_2+...+x_n+y=m$ برابر است با $\binom{n+m}{n}=\binom{n+m}{m}$.

مثال. سه دختر به نام های مریم، سارا و فرزانه و نه پسر می خواهند در یک ردیف بایستند. این کار به چند طریق امکان دارد اگر بخواهیم که سارا بین مریم و فرزانه باشد و بین مریم و سارا نیز دقیقاً چهار پسر باشد؟

حل.

روش اول. ابتدا دخترها را به دو طریق به صف می کنیم. (مریم سمت راست یا چپ سارا) حال جای پسرها را تعیین می کنیم. فرض کنید x_1 تعداد پسرهای قبل دختر اول و x_2 تعداد پسرهای بین دختر اول و دوم و x_3 تعداد پسرهای بین دختر دوم و سوم و x_4 تعداد پسرهای بعد از دختر سوم باشد. اگر ترتیب دختر ها به ترتیب مریم، سارا و فرزانه (فرزانه، سارا و مریم) باشد آن گاه داریم $x_2=4$ $(x_3=4)$ و $x_1+x_2+x_3+x_4=9$. همان طور که می دانید تعداد جواب های صحیح نامنفی معادله ی $x_1+x_2+x_3+x_4=9$ با شرط $x_2=4$ $(x_3=4)$ برابر است با $\binom{7}{2}=21$. پس جای پسرها به $\binom{7}{2}$ طریق تعیین می شود. حال خود پسرها هم به $9!$ طریق می توانند بایستند پس جواب مسئله برابر است با $9!\times 42=\binom{7}{2}9!\times 2$.

روش دوم. ابتدا پسرهایی که باید بین مریم و سارا قرار بگیرند را به $\binom{9}{4}$ طریق انتخاب می کنیم. ولی خود پسرها نیز به $4!$ طریق می توانند بین مریم و سارا قرار بگیرند. حال مریم و سارا و این 4 پسر را

یک نفر مانند A در نظر می گیریم. پس ما می خواهیم 7 نفر (5 پسر دیگر و فرزانه و A) را به صف بایستانیم. این کار را به !7 طریق می توان انجام داد. پس جواب مسئله برابر است با $7!\times 4!\binom{9}{4} = 42\times 9!$.

(دقت کنید که اگر A قبل از فرزانه قرار بگیرد، آن گاه سارا بعد از مریم و در غیر این صورت قبل از مریم قرار می گیرد.)

مثال. یک سکه را چند بار به هوا پرتاب می کنیم. اگر رو بیاید آن را با T و اگر پشت بیاید آن را با H نشان می دهیم. اگر بعد از یک بار رو آمدن، بلافاصله پشت بیاید آن را با TH و اگر دو بار پشت سرهم پشت بیاید با HH نمایش می دهیم. برای مثال، اگر 15 بار سکه انداختن را با $HHTTHHHHTHHTTTT$ نمایش دهیم در آن پنج بار HH، سه بار HT، دو بار TH و چهار بار TT آمده است. در چند دنباله از انداختن 15 سکه، دقیقاً دوبار HH، سه بار HT، چهار بار TH و پنج بار TT می آید؟

حل. چون تعداد TH ها یک واحد از HT ها بیش تر است پس اولین بار رو و آخرین بار پشت آمده است. (دقت کنید که هر طور سکه را بیندازیم تعداد TH ها با تعداد HT ها حداکثر یک واحد اختلاف دارد.) پس می توانیم فرض کنیم که آمدن سکه ها به شکل زیر باشد.

$$\underbrace{T\ldots T}_{x_1}\underbrace{H\ldots H}_{y_1}\underbrace{T\ldots T}_{x_2}\underbrace{H\ldots H}_{y_2}\underbrace{T\ldots T}_{x_3}\underbrace{H\ldots H}_{y_3}\underbrace{T\ldots T}_{x_4}\underbrace{H\ldots H}_{y_4}$$

یعنی x_1 بار اول T، بار x_1+1 تا x_1+y_1 ام H، ... و y_4 تا آخر H آمده باشد. اگر x_i ها و y_i ها $(1\le i\le 4)$ طبیعی باشند، واضح است که در این رشته دقیقاً سه بار HT و چهار TH آمده است. چون در این رشته دو بار HH آمده است پس $y_1-1+y_2-1+y_3-1+y_4-1=2$، یعنی $y_1+y_2+y_3+y_4=6$. به طریق مشابه چون در این رشته پنج بار TT آمده است

پس $x_1 - 1 + x_2 - 1 + x_3 - 1 + x_4 - 1 = 5$، یعنی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$. تعداد جواب های طبیعی معادله ی $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 6$، برابر است با $\binom{5}{3} = 10$ همچنین تعداد جواب های طبیعی معادله ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$، برابر است با $\binom{8}{3} = 56$. پس طبق اصل ضرب جواب نهایی برابر است با $\binom{5}{3}\binom{8}{3} = 560$.