

تناظر یک به یک و مسائل مربوط به شمارش

فرض کنید در یک کلاس، n دانش آموز نشسته باشند. اگر این کلاس 20 نیمکت داشته باشد و هر

دانش آموز روی یک نیمکت نشسته باشد، واضح است که $n \leq 20$. ولی اگر بدانیم روی هر نیمکت

حداقل یک دانش آموز نشسته باشد، واضح است که $n \geq 20$. همچنین اگر بدانیم روی هر نیمکت دقیقاً

یک نفر نشسته است، بدون شمردن تعداد دانش آموزان، می توانیم بگوییم که $n = 20$.

تعریف. تابع $f : A \rightarrow B$ را یک تابع یک به یک می نامیم. اگر

$$\forall x, y \in A, x \neq y : f(x) \neq f(y)$$

به عبارت دیگر تابع f به هیچ دو عضو دلخواه A ، یک مقدار را نسبت ندهد.

اصل رابطه یک به یک. اگر یک رابطه یک به یک (تابع یک به یک) از مجموعه A به مجموعه B

$$\text{وجود داشته باشد، آنگاه } |A| \leq |B|.$$

تعریف. تابع $f : A \rightarrow B$ را یک تناظر یک به یک می نامیم اگر یک به یک و پوشا باشد.

اصل تناظر یک به یک. اگر یک تناظر یک به یک از مجموعه A به مجموعه B وجود داشته باشد،

$$\text{آنگاه } |A| = |B|.$$

دقت کنید که در اصول فوق لزومی ندارد مجموعه های A و B متناهی باشد

مثال. با استفاده از تناظر یک به یک ثابت کنید:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

حل. ثابت می‌کنیم که یک تناظر یک به یک بین تعداد زیر مجموعه‌های k عضوی مجموعه S

$\{1, 2, \dots, n\}$ و تعداد زیر مجموعه $n-k$ عضوی $\left(\binom{n}{n-k}\right)$ آن وجود دارد؛ در نتیجه تساوی

برقرار است.

اگر $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ یک زیر مجموعه k عضوی مجموعه S باشد، آن گاه $S - A$ هم یک زیر

مجموعه $n-k$ عضوی، مجموعه S است و برعکس. به عبارت دیگر انتخاب شدن k عنصر از بین n

عنصر مثل انتخاب نکردن $n-k$ عنصر از بین n عنصر است. زیرا برای انتخاب k عنصر از بین n عنصر

می‌توان ابتدا $n-k$ عنصر را انتخاب کرد و با حذف آنها k عنصر را به دست آورد.

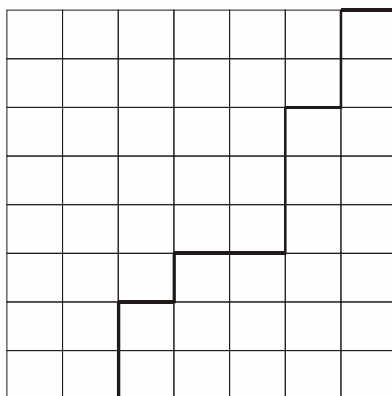
مثال. مسئله‌ی مسیر. شخصی در ساختمانی کار می‌کند که هفت بلوک در شرق و هشت بلوک

در شمال خانه‌اش قرار دارد. این فرد برای رسیدن به محل کارش هر روز 15 بلوک را طی می‌کند. این

شخص به چند طریق می‌تواند به محل کارش برود؟



محل کار



خانه

حل. مسئله ی مسیر را با تعداد کلمات 15 حرفی با 7 حرف E و 8 حرف N می توانیم متناظر کنیم. اگر هر حرف N نشان گر رفتن به سمت شمال و هر حرف E نشان گر رفتن به سمت شرق باشد، واضح است که به ازای هر مسیر، یک کلمه با 7 حرف E و 8 حرف N وجود دارد و بالعکس. به عنوان مثال مسیر متناظر با شکل بالا، به صورت EENNENEENNENNE می باشد. بنابراین یک تناظر یک به یک بین مسیرها و کلماتی که با 7 حرف E و 8 حرف N ساخته می شوند، وجود دارد. در نتیجه تعداد

$$\text{مسیرهای مورد نظر برابر است با } \binom{15}{8}.$$

به طور کلی اگر بخواهیم در صفحه ی مختصات از نقطه ی (a, b) به نقطه ی (c, d) برویم؛ با این

شرط که در هر حرکت از نقطه ی (x, y) بتوانیم به یکی از نقاط $(x+1, y)$ ، $(x-1, y)$ ، $(x, y+1)$ و $(x, y-1)$

برویم، تعداد کوتاه ترین مسیرها از نقطه ی (a, b) به نقطه ی (c, d) برابر است با تعداد کلماتی

که با $|a-c|$ تا x و $|b-d|$ تا y ساخته می شوند. در نتیجه تعداد این مسیرها برابر است

$$\text{با } \binom{|a-c|+|b-d|}{|a-c|}$$

اگر X یک مجموعه باشد، مجموعه‌ی تمام زیر مجموعه‌های X را مجموعه‌ی توانی X می‌نامند و

با $P(X)$ نشان می‌دهند. به عنوان مثال اگر $X = \{1, 2, 3\}$ باشد، مجموعه‌ی توانی X برابر است با:

$$P(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

مثال. اگر S یک مجموعه‌ی n عضوی باشد. تعداد اعضای $P(S)$ چقدر است؟

حل. بین زیر مجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی و دنباله‌های دودویی به طول n ، یک تناظر

یک به یک برقرار می‌کنیم.

فرض کنید $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ و

$$B = \{b_1 b_2 \dots b_n \mid b_i = 0, 1; i = 1, \dots, n\}$$

مجموعه‌ی تمام دنباله‌های دودویی به طول n باشد. تابع یک به یک و پوشای $f : P(S) \rightarrow B$ را

به این شکل تعریف می‌کنیم.

$$\forall A \in P(S), f(A) = c_1 c_2 \dots c_n$$

به طوری که به ازای هر $i = 1, 2, \dots, n$ اگر $a_i \in A$ ، آن گاه $c_i = 1$ و در غیر این صورت $c_i = 0$.

به عنوان مثال اگر $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $A = \{1, 4, 6\}$ باشد؛ آن گاه $f(A) = 100101$.

واضح است که تابع فوق یک به یک و پوشا است. بنابراین $|P(S)| = |B|$. ولی می‌دانیم

که $|B| = 2^n$ ، پس تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است با 2^n .

مثال. فرض کنید $X = \{1, 2, \dots, n\}$. تعداد زیر مجموعه‌های k عضوی X که شامل هیچ دو عضو

متوالی نباشند را بیابید.

حل. بین زیر مجموعه های k تایی X که شامل هیچ دو عضو متوالی نیستند و تعداد زیر مجموعه

های k عضوی مجموعه $Y = \{1, 2, \dots, n - k + 1\}$ یک تناظر یک به یک برقرار می کنیم.

فرض کنید $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ یک زیر مجموعه k عضوی X باشد که شامل هیچ دو عضو متوالی

نباشد. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله می توان فرض کرد $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ ، ولی چون هیچ دو

عضوی در A متوالی نیستند بنابراین داریم: $a_1 < a_2 - 1, a_2 < a_3 - 1, \dots, a_{k-1} < a_k - 1$. در نتیجه:

$$1 \leq a_1 < a_2 - 1 < a_3 - 2 < \dots < a_k - k + 1 \leq n - k + 1$$

حال اگر قرار دهیم:

$$b_1 = a_1, b_2 = a_2 - 1, \dots, b_k = a_k - k + 1$$

به ازای هر مجموعه ای مانند A ، یک مجموعه k عضوی مانند $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\} \subset Y$ وجود

دارد و بالعکس. بنابراین یک تناظر یک به یک بین زیر مجموعه های مورد نظر و زیر مجموعه های k

عضوی Y وجود دارد. پس تعداد زیر مجموعه های مورد نظر برابر است با تعداد زیر مجموعه های k

$$\text{عضوی } Y, \text{ یعنی برابر است با } \binom{n-k+1}{k}.$$

مثال. در یک مسابقه ی تیر اندازی، نه گوی در یک ستون دو تایی، یک ستون سه تایی و یک

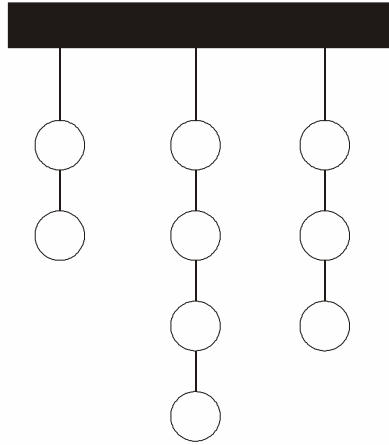
ستون چهار تایی مانند شکل زیر آویزان شده اند. یک تیرانداز ماهر می خواهد با روش زیر هر نه گوی را

بشکند:

• ابتدا او یک ستون را انتخاب می کند تا هدفی از آن را بشکند.

• سپس او پایین ترین گویی را که قبلاً نشکسته است، هدف قرار می دهد.

اگر هیچ کدام از تیرهای این تیرانداز خطا نرود، او به چند طریق می تواند هر نه گوی را بشکند.



حل. به ستون اول حرف A ، به ستون دوم حرف B و به ستون سوم حرف C را نسبت می دهیم.

هرگاه این تیرانداز ستونی را برای هدف گیری انتخاب کرد، حرف متناظر با آن ستون را می نویسیم. به

این ترتیب یک تناظر یک به یک بین تعداد راه های تیراندازی و تعداد جایگشت ها کلمه ی

$$AABBBBCCC \text{ برقرار می شود. پس تعداد راه های تیراندازی برابر است با } \frac{9!}{2!4!3!}.$$

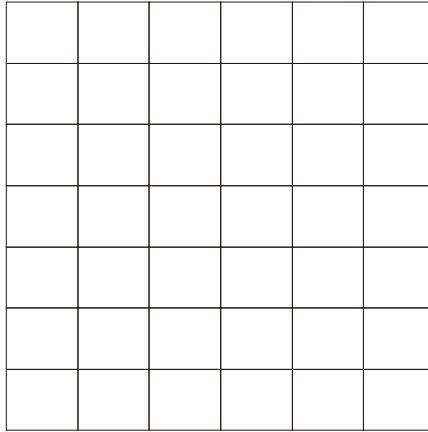
مثال 6. یک مستطیل $m \times n$ را با رسم خط هایی موازی عرض و طول آن به mn مربع واحد

تقسیم کرده ایم.

الف. در شکل حاصل چند مستطیل دیده می شود؟

ب. در شکل حاصل چند مربع دیده می شود؟





حل.

الف. می دانیم از تقاطع هر دو خط افقی و دو خط عمودی یک و فقط یک مستطیل ساخته

می شود. بنابراین تعداد مستطیل های شکل فوق برابر است با تعداد راه های انتخاب دو

خط افقی و دو خط عمودی. پس طبق اصل تناظر یک به یک چون $m + 1$ خط افقی و n

$1 +$ خط عمودی داریم، تعداد مستطیل هایی که در شکل بالا دیده می شود برابر است

$$\binom{m+1}{2} \binom{n+1}{2}$$

ب. می دانیم که هر مربع $(ABCD)$ در شکل بالا با انتخاب نقطه ی گوشه ی سمت راست بالا

(نقطه A) و طول آن مشخص می شود. حال تعداد مربع های به ضلع k را می شماریم.

نقطه ی A روی تقاطع هر یک از $m - k + 1$ خط افقی اول با هر یک از $n - k + 1$ خط

عمودی اول می تواند باشد. پس نقطه ی A به $(m - k + 1)(n - k + 1)$ طریق می

توان انتخاب کرد. پس تعداد مربع های به ضلع k در شکل فوق برابر است با

$(m - k + 1)(n - k + 1)$ در نتیجه تعداد مربع های موجود در شکل فوق برابر است

$$\sum_{k=1}^{\min\{m,n\}} (m-k+1)(n-k+1)$$

مثال. جایگشت $x_1 x_2 \dots x_{2n-1} x_{2n}$ از مجموعه $S = \{1, 2, \dots, 2n-1, 2n\}$ را در نظر بگیرید. این

جایگشت دارای خاصیت P است اگر به ازای حداقل یک i بین 1 تا $2n-1$ داشته باشیم $|x_i - x_{i+1}| = n$.

ثابت کنید به ازای هر n ، تعداد جایگشت های دارای خاصیت P از تعداد جایگشت هایی که این

خاصیت را ندارند بیش تر است.

به عنوان مثال اگر $n = 2$ و A مجموعه ی جایگشت های بدون خاصیت P و B مجموعه ی

جایگشت های دارای خاصیت P باشد، داریم:

$$A = \{1234, 1432, 2143, 2341, 3214, 3412, 4123, 4321\}$$

$$B = \{\underline{1243}, \underline{13\ 24}, \underline{13\ 42}, \underline{1423}, \underline{2134}, \underline{2314}, \underline{24\ 13}, \underline{24\ 31},$$

$$\underline{31\ 24}, \underline{31\ 42}, \underline{3241}, \underline{3421}, \underline{4132}, \underline{42\ 13}, \underline{42\ 31}, \underline{4312}\}$$

واضح است که $16 = |B| > |A| = 8$.

حل. حالت $n = 1$ بدیهی است. پس فرض می کنیم $n \geq 2$ باشد. فرض کنید A (مجموعه ی

همه ی جایگشت های S که دارای خاصیت P نمی باشند (می باشند) باشد. برای این که نشان دهیم $|B|$

$|A| >$ کافی است نشان دهیم تابع $f: A \rightarrow B$ ه یک به یک و غیر پوشا است وجود دارد.

برای سادگی کار، زوج $\{k, n+k\}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) را یک زوج متناظر می نامیم. همچنین اگر

زوج $\{k, n+k\}$ در جایگشتی متوالی باشند، آنها را زوج متناظر متوالی می نامیم.

فرض کنید $a = x_1 x_2 \dots x_{2n}$ یک عضو A باشد. فرض کنید x_r عضو متناظر x_1 باشد، چون a

دارای خاصیت P نیست. پس $3 \leq r \leq 2r$. حال تعریف می کنیم:

$$f(a) = x_2 x_3 \dots x_{r-1} \underline{x_1 x_2} x_{r+1} \dots x_{2n}$$

تابع f ، x_1 را دقیقاً قبل از x_r قرار می دهد. واضح است که $\{x_1, x_2\}$ تنها زوج متناظر ماوولی

در $f(a) \in B$ است. (به عنوان مثال، $f(2143) = 1243$ و $f(1234) = 2134$) واضح است که f و

یک تابع از A به B می باشد.

حال نشان می دهیم که f یک به یک است. فرض کنید

$$a = x_1 x_2 \dots x_{2n}$$

$$b = y_1 y_2 \dots y_{2n}$$

دو عضو A باشند که x_r زوج متناظر x_1 و y_s زوج متناظر y_1 باشند، به طوری که $3 \leq r, s \leq 2n$.

فرض کنید $f(a) = f(b)$

$$x_2 x_3 \dots x_{r-1} \underline{x_1 x_r} x_{r+1} \dots x_{2n} = y_2 y_3 \dots y_{s-1} \underline{y_1 y_s} y_{s+1} \dots y_{2n}$$

واضح است که $\{x_1, x_2\}$ و $\{y_1, y_s\}$ تنها زوج متناظر متوالی $f(a)$ و $f(b)$ هستند. در نتیجه r

به ازای هر $i = 1, 2, \dots, 2n$ ، $x_i = y_i$. پس به ازای هر $x_r = y_s$ ، $x_1 = y_1 = s$ و f یک تابع یک

به یک است.

ولی $f(A)$ مجموعه ی تمام جایگشت های دارای خاصیت P است که دقیقاً یک زوج متناظر متوالی

دارند. در نتیجه $f(A) \subset B$ و $f(A) \neq B$. پس f یک تابع یک به یک و غیر پوشا از A به B می باشد.

پس حکم ثابت شد.

مثال. مجموعه ی $S = \{1, 2, \dots, 1990\}$ را در نظر بگیرید. یک زیر مجموعه ی 31 عضوی S

خوب نامیده می شود اگر مجموع اعضایش بر پنج بخش پذیر باشد. تعداد زیر مجموعه های 31 عضوی

خوب S را بیابید.

حل. فرض کنید S_i ($0 \leq i \leq 4$) مجموعه‌ی تمام زیر مجموعه‌های S باشد که باقی

مانده‌ی آنها بر 5 برابر i است. ثابت می‌کنیم یک تناظر یک به یک بین S_i ها برقرار است.

فرض کنید $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{31}\} \subset S$ یک عضو S_i ($0 \leq i \leq 4$) باشد. از روی هر S_i ، $A \in S_i$

مجموعه $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{31}\}$ را به این شکل می‌سازیم که $b_j = (a_j \bmod 1990) + 1$ ($1 \leq j \leq 31$).

یعنی اگر $a_j < 1990$ باشد، $b_j = a_j + 1$ و اگر $a_j = 1990$ باشد، $b_j = 1$. در نتیجه داریم:

$$\sum_{j=1}^{31} b_j \equiv \sum_{j=1}^{31} a_j + 31 \equiv i + 1$$

بنابراین تابع یک به یکی داریم که به هر عضو S_i ($0 \leq i \leq 3$)، یک عضو S_{i+1} و به هر عضو S_4

یک عضو S_0 را نسبت می‌دهد. در نتیجه

$$|S_0| = |S_1| = |S_2| = |S_3| = |S_4| \text{ ولی می‌دانیم } \binom{1990}{5} = |S_0| + |S_1| + |S_2| + |S_3| + |S_4| \text{ پس}$$

$$|S_0| = \frac{1}{5} \binom{1990}{5}$$

مثال. فرض کنید a_n تعداد دنباله‌های دودویی به طول n باشد که شامل هیچ زیر رشته‌ی 010

نباشند و b_n تعداد دنباله‌های دودویی به طول n باشد که شامل هیچ زیر رشته‌ی 1100 یا 0011 ،

نباشند. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n ، $b_{n+1} = 2a_n$.

حل. به هر دنباله‌ی دودویی $x_1 x_2 \dots x_n$ به طول n ، دو دنباله‌ی دودویی به طول $n + 1$

مانند $y_0 y_1 \dots y_n$ و $z_0 z_1 \dots z_n$ ، به این شکل نسبت می‌دهیم که $z_0 = 1$ ، $y_0 = 0$ ، $y_i = (y_{i-1} + x_i) \bmod 2$ ،

و $z_i = (z_{i-1} + x_i)$ ($1 \leq i \leq n$). واضح است که این یک تناظر یک به یک بین دنباله‌های دودویی به طول

n و دنباله‌های دودویی به طول $n + 1$ که جمله‌ی اول آنها صفر (یک) است، می‌باشد. اگر به تناظر بالا

نگاه کنیم می بینیم که باقی مانده ی تقسیم x_i و $y_{i-1} + y_i(z_{i-1} + z_i)$ بر دو یکسان است. در نتیجه تناظر یک به یک فوق هر دنباله ی دودویی به طول n را که شامل زیر رشته ی 010 نمی باشد به یک دنباله ی دودویی به طول $n + 1$ که شامل هیچ زیر رشته ی 0011 یا 1100 نمی باشد و جمله ی اول آنها صفر (یک) است، متناظر می کند. پس به ازای هر دنباله ی دودویی به طول $n + 1$ که شامل زیر رشته ی 0011 یا 1100 نمی باشد وجود دارد. در نتیجه $b_{n+1} = 2a_n$.

مثال 10. تعداد ماتریس های $m \times n$ با درایه های 1 و -1 را پیدا کنید که حاصل ضرب عناصر هر سطر آن برابر -1 و حاصل ضرب عناصر هر ستون آن نیز برابر با -1 شود. ادعای خود را ثابت کنید.

اثبات. اگر چنین ماتریسی وجود داشته باشد باید $m \equiv 2 \pmod{2}$ باشد. زیرا از یک طرف حاصل ضرب تمام درایه های این ماتریس برابر است با حاصل ضرب حاصل ضرب درایه های سطرهای آن یعنی $(-1)^m$ و از طرف دیگر برابر است با حاصل ضرب حاصل ضرب درایه های ستون های آن یعنی $(-1)^n$. پس باید داشته باشیم $(-1)^m = (-1)^n$ یعنی m و n دارای زوجیت یکسانی باشند، دقیقاً $2^{(m-1)(n-1)}$ ماتریس با شرط فوق وجود دارد. برای این کار نشان می دهیم که یک تناظر یک به یک بین تعداد ماتریس های $(n-1) \times (m-1)$ با درایه های 1 و -1 و این گونه ماتریس ها وجود دارد.

یک ماتریس $(m-1) \times (n-1)$ دلخواه با درایه های 1 و -1 را در نظر بگیرید. حال با سطر (سطر m) و یک ستون (ستون n) به آن اضافه می کنیم. حاصل ضرب عناصر سطر i ام ماتریس اولیه را با r_i و حاصل ضرب عناصر ستون j ام ماتریس اولیه را با c_j و حاصل ضرب تمام عناصر ماتریس اولیه را با

$$A = c_1 \times c_2 \times \dots \times c_{n-1} = r_1 \times r_2 \times \dots \times r_{m-1}$$

نشان می دهیم. درایه های سطر و ستون آخر ماتریس جدید به شکل زیر ساخته می شوند.

درایه ی (m, j) برابر است با $(-1)^n A = (-1)^m A$. (چرا؟) واضح است که این تناظر یک به یک و پوشا می

باشد. بنابراین تعداد ماتریس های مورد نظر برابر است با $2^{(n-1)(m-1)}$.

