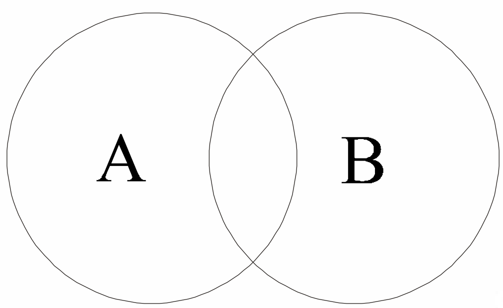
اصل شمول و عدم شمول

مقدمه

همان طور که در قبل دیدیم، در حل مسایلی شمارشی، مجموعه اشیایی را که باید شمرده شوند، می توان به چند زیرمجموعه قابل شمارش جدا از هم تقسیم کرد و با استفاده از اصل جمع، جواب مساله را به دست آورد. اما تقسیم یک مجموعه به چند زیرمجموعه قابل شمارش جدا از هم، همیشه کار ساده ای نیست. در این فصل با اصل شمول و عدم شمول آشنا می شویم؛ سپس یاد می گیریم چگونه این مشکل را حل کنیم.

اگر A و B دو مجموعه متناهی جدا از هم باشند، $|A\cup B|=|A|+|B|$. حال اگر A و B جدا از هم نباشند، $|A\cup B|$ را چگونه حساب کنیم؟



اگر A و B دو مجموعه متناهی باشند داریم:

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B| \qquad (1)$$

مثال 1. در یک کلاس 30 نفری، 21 نفر به زبان انگلیسی، 17 نفر به زبان فرانسه و 10 نفر به هر دو زبان می توانند صحبت کنند. در این کلاس چند نفر هستند که به هیچ یک از این دو زبان صحبت نمی کنند؟

حل. فرض کنید E و F مجموعه ی افرادی باشند که به ترتیب به زبان انگلیسی و فرانسه صحبت می کنند. با استفاده از فرمول(1)داریم $|E \cup F| = |E| + |F| - |E \cap F| = 21 + 17 - 10 = 28$. بنابراین

$2 = 28 - 30$ نفر به هیچ یک از دو زبان انگلیسی و فرانسه صحبت نمی کنند.

مثال. چند عدد طبیعی مانند n وجود دارد که مقسوم علیه 10^{40} یا 20^{30} باشد؟

حل. فرض کنید A و B به ترتیب مجموعه ی مقسوم علیه های 10^{40} و 20^{30} باشند. مساله $|A \cup B|$ را می خواهد. $10^{40} = 2^{40} \times 5^{40}$ و $20^{30} = 2^{60} \times 5^{30}$، بنابراین $|A| = 41 \times 41 = 41^2$ و $|B| = 61 \times 31$. همچنین می دانیم هر مقسوم علیه مشترک 10^{40} و 20^{30}، مقسوم علیه $\gcd(10^{40}, 20^{30}) = 2^{40} \times 5^{30}$ می باشد. پس $|A \cap B| = 41 \times 31$.

پس $|A \cup B| = 41^2 + 61 \times 31 - 41 \times 31 = 2301$ عدد طبیعی وجود دارد که مقسوم علیه 10^{40} یا 20^{30} می باشند.

اصل شمول و عدم شمول

در بخش قبل دیدیم چگونه تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه را حساب می کنیم. حال اگر بخواهیم تعداد اعضای اجتماع سه مجموعه را حساب کنیم، چه کار باید بکنیم؟

فرض کنید A، B و C، سه مجموعه متناهی باشند.

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C|$$

$$=|A\cup B|+|C|+|(A\cap C)\cup(B\cap C)|$$

$$=|A|+|B|-|A\cap B|+|C|$$

$$-(|A\cap C|+|B\cap C|)+|(A\cap C)\cap(B\cap C)|$$

$$=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

بنابراین داریم

$$(2)\quad |A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

مثال. چند عدد طبیعی کوچک تر یا مساوی 1000 وجود دارد که بر 2، 3 یا 5 بخش پذیر است؟

قبل از این که به حل مسئله بپردازیم سه نکته را که در حل مسئله بـه مـا کمـک مـی کننـد یادآوری می کنیم.

1. **تعداد مضارب طبیعی k که کوچک تر یا مساوی با n است برابر است با $\left[\frac{n}{k}\right]$.**
2. **تعداد اعداد طبیعی بزرگ تر از m و کوچک تر یا مساوی n که بر k بخش پذیرنـد برابـر است با $\left[\frac{n}{k}\right]-\left[\frac{m}{k}\right]$.**
3. **عدد طبیعی x بر دو عدد a و b بخش پذیر است اگر و فقط اگر بـر ک. م. م a و b ($[a, b]$)، بخش پذیر باشد.**

حل. به ازای هر عدد طبیعی k، تعریف می کنیم:

$$B_k=\left\{x \mid x\in \mathbf{N}, x\le 1000, x\overset{k}{\equiv}0\right\}$$

پس در این مثال $|B_2\cup B_3\cup B_5|$ را می خواهیم حساب کنیم.

$$|B_2| = \left\lfloor \frac{1000}{2} \right\rfloor = 500$$

$$|B_3| = \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor = 333$$

$$|B_5| = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200$$

$$|B_2 \cap B_3| = |B_6| = \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor = 166$$

$$|B_2 \cap B_5| = |B_{10}| = \left\lfloor \frac{1000}{10} \right\rfloor = 100$$

$$|B_3 \cap B_5| = |B_{15}| = \left\lfloor \frac{1000}{15} \right\rfloor = 66$$

$$|B_2 \cap B_3 \cap B_5| = |B_{30}| = \left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor = 33$$

حال طبق فرمول 2 داریم:

$$|B_2 \cup B_3 \cup B_5| =$$

$$|B_2|+|B_3|+|B_5|-|B_2 \cap B_3|-|B_2 \cap B_5|-|B_3 \cap B_5|+|B_2 \cup B_3 \cup B_5| =$$

$$500+333+200-166-100-66+33=734$$

پس جواب مسآله برابر است با 734.

مثال. در یک مدرسه 100 دانش آموز در سه امتحان فیزیک، شیمی و ریاضی شرکت کرده اند. هر نفر در هر سه امتحان شرکت کرده است. در بین آنها 92 نفر در امتحان فیزیک، 75 نفر در امتحان شیمی، 63 نفر در امتحان ریاضی قبول شده اند. حداکثر 65 نفر در هر دو امتحان فیزیک و شیمی، 54 نفر در ریاضی و فیزیک، و 48 نفر در امتحان های شیمی و ریاضی قبول شده اند. دانش آموزانی که در هر سه درس قبول شده اند حداکثر چند نفر می توانند باشند؟

حل. فرض کنید P، C و R، به ترتیب مجموعه ی افرادی که در امتحان های فیزیک، شیمی و ریاضی قبول شده اند، باشند. مساله حداکثر مقدار $|P \cap C \cap R|$ را می خواهد.

$$\begin{aligned}|P \cap C \cap R| &= |P \cup C \cup R| - |P| - |C| - |R| + |P \cap C| + |P \cap R| + |C \cap R| \\ &\le 100 - 92 - 75 - 63 + 65 + 54 + 48 = 37\end{aligned}$$

بنابراین حداکثر 37 نفر در هر سه آزمون قبول شده اند.

مثال. معادله ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$، چند جواب صحیح دارد به طوری که $1 \le x_1 \le 5$، $0 \le x_2 \le 7$، $4 \le x_3 \le 8$ و $2 \le x_4 \le 6$؟

حل. فرض کنید c_1، c_2، c_3 و c_4، به ترتیب شرط های $x_1 \ge 6$، $x_2 \ge 8$، $x_3 \ge 9$ و $x_4 \ge 7$ باشند. همچنین S مجموعه ی جواب های معادله ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ با شرایط $x_1 \ge 1$، $x_2 \ge 0$، $x_3 \ge 4$ و $x_4 \ge 2$ باشد. مساله مقدار $N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}\,\overline{c_3}\,\overline{c_4})$ را می خواهد.

می دانیم:

$$N = \binom{16}{3}$$

$$N(c_1) = N(c_3) = N(c_4) = \binom{11}{3}, N(c_2) = \binom{8}{3}$$

$$N(c_1c_2) = N(c_2c_3) = N(c_2c_4) = 1$$

$$N(c_1c_3) = N(c_1c_4) = N(c_3c_4) = \binom{6}{3}$$

همچنین امکان ندارد بیش از دو شرط با هم اتفاق بیفتند. بنابراین

$$N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}\,\overline{c_3}\,\overline{c_4}) = \binom{16}{3} - 3\binom{11}{3} - \binom{8}{3} + 3 + 3\binom{6}{3} = 72$$

قبل از حل چند مثال دیگر، چند نماد برای ساده تر بیان کردن اصل شمول و عدم شمول معرفـــی می کنیم. می نویسیم

$$S_0 = N,$$
$$S_1 = N(c_1) + N(c_2) + \ldots + N(c_p),$$
$$S_2 = \sum_{i<j} N(c_i c_j)$$

و به طور کلی،

$$S_k = \sum N(c_{i_1} c_{i_2} \ldots c_{i_k}), \qquad 1 \le k \le p$$

که در آن مجموع روی همه ی انتخاب های k تایی از گردایه ی p شرط مفروض انجام مـــی گیـــرد.

بنابراین S_k حاوی $\binom{p}{k}$ جمعوند است.