رابطه (2)   تعمیم اصل شمول و عدم شمول

در قسمت قبل یاد گرفتیم که چگونه از اصل شمول و عدم شمول برای تعیین تعداد اعضای $N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}\cdots\overline{c_p})$، یعنی تعداد عنصرهایی از S که در هیچ یک از p شرط c_1، c_2، ...، c_p صدق نمی کنند، استفاده کنیم. حال فرض کنید E_m تعداد عنصرهایی از S باشد که در دقیقا m شرط از p شرط صدق می کنند. می خواهیم فرمولی برای محاسبه E_m بیابیم.

قضیه 1. فرض کنید S مجموعه ای از اشیا و $(1 \le i \le p)$ شرایطی روی اعضای S باشند، E_m (تعداد عضوهایی از S که در دقیقا m تا از این شرایط صدق می کنند.) برابر است با:

$$E_m = S_m - \binom{m+1}{1} S_{m+1} + \binom{m+2}{2} S_{m+2} - \cdots + (-1)^{p-m} \binom{p}{p-m} S_p$$

اثبات. فرض کنید $x \in S$، سه حالت زیر را در نظر می گیریم:

- وقتی که x در کمتر از m شرط صدق کند. در این حالت سهم x در محاسبه هر یک از جملات E_m، S_m، S_{m+1}، و ... و S_p برابر 0 است و بنابراین، در هیچ یک از طرفین معادله شمرده نمی شود.
- وقتی که x در دقیقا m شرط صدق کند. در این حالت x یکبار در E_m و یکبار در S_m شمرده می شود ولی در جملات S_{m+1}، S_{m+2}، ... و S_p شمرده نمی شود. درنتیجه x در هر یک از طرفین معادله بالا یکبار شمرده می شود.

- وقتی که x در شرط $(m < q \le p)$ صدق کند. در این حالت x در E_m شمرده نمی شود. ولی $\binom{q}{m}$ بار در S_m، $\binom{q}{m+1}$ بار در S_{m+1}، ... و $\binom{q}{p}$ بار در S_q شمرده مــی شــود، ولــی در هیچ یک از جملات S_{q+1}، S_{q+2}، ... و S_p شمرده نمی شود. پس x در طرف راست معادله،

$$\binom{q}{m}-\binom{m+1}{1}\binom{q}{m+1}+\binom{m+2}{2}\binom{q}{m+2}$$

$$-\mathbf{K}+(-1)^{q-m}\binom{q}{q-m}\binom{q}{p}$$

بار به حساب می آید. از طرفی مــی دانــیم $\binom{m+k}{k}\binom{q}{m+k}=\binom{q}{m}\binom{q-m}{k}$**. بنــابراین x در طرف راست معادله،**

$$\binom{q}{m}\binom{q-m}{0}-\binom{q}{m}\binom{q-m}{1}+\binom{q}{m}\binom{q-m}{2}$$

$$-\mathbf{L}+(-1)^{q-m}\binom{q}{m}\binom{q-m}{q-m}$$

$$=\binom{q}{m}\left[\binom{q-m}{0}-\binom{q-m}{1}+\binom{q-m}{2}\right.$$

$$=\binom{q}{m}[1+(-1)]^{q-m}=0$$

بار به حساب آمده است.

پس x در هر دو طرف تساوی به یک اندازه سهم دارد. درنتیجه حکم ثابت شد.

قضیه 2. فرض کنید L_m تعداد عنصرهایی از S باشد که در حداقل m شرط از p شرط مفروض صدق می کنند، در این صورت داریم:

$$L_m = S_m - \binom{m}{m-1} S_{m+1} + \binom{m+1}{m-1} S_{m+2} - \mathbf{L} + (-1)^{p-m} \binom{p-1}{m-1} S_p$$

اثبات. اثبات به عنوان تمرین به عهده خواننده.

مثال. تعداد اعضای $S = \{1, 2, \ldots, 1000\}$ را بیابید که:

الف. بر هیچ کدام از اعداد 2، 3 و 5 بخش پذیر نباشند.

ب. دقیقاً بر یکی از اعداد 2، 3 و 5 بخش پذیر باشند.

ج. دقیقاً بر دو تا از اعداد 2، 3 و 5 بخش پذیر باشند.

د. بر تمام اعداد 2، 3 و 5 بخش پذیر باشند.

حل. فرض کنید c_i شرط بخش پذیری اعضای S بر i $(i = 2, 3, 5)$ باشد. قسمت الف تا د به ترتیب مقدار E_0، E_1، E_2 و E_3 را می خواهند. در مثال های قبل دیدیم که

$$N(c_2) = 500, \quad N(c_3) = 333, \quad N(c_5) = 200, \quad N(c_2c_3) = 166,$$

$$N(c_2c_5) = 100, \quad N(c_3c_5) = 66, \quad N(c_2c_3c_5) = 33$$

در نتیجه داریم:

$$S_0 = 1000, \qquad S_2 = 500 + 333 + 200 = 1033,$$

$$S_2 = 166 + 100 + 66 = 322, \quad S_3 = 333$$

1. $$E_0 = S_0 - S_1 + S_2 - S_3 = 266$$

2. $$E_1 = S_1 - 2S_2 + 3S_3 = 468$$

3. $$E_2 = S_2 - \binom{3}{1} S_3 = 233$$

4. $$E_3 = S_3 = 33$$

مثال. یک منشی n نامه و آدرس های مربوط به هر یک را روی n پاکت تایپ کرده است و هر نامه را در یک پاکت قرار می دهد. این منشی به چند طریق می تواند هیچ نامه ای را در پاکت مربوط به خودش قرار ندهد؟

حل. نامه ها و پاکت های آن ها را به ترتیب با شماره های **1** تا n شماره گذاری می کنیم. بنابراین نامه ی شماره ی i مربوط به پاکت شماره ی i می باشد. فرض کنید در پاکت شماره ی i، نامه ی شماره ی P_i قرار بگیرد. پس ما تعداد جایگشت های **1** تا n را می خواهیم که به ازای هر $1 \le i \le n$، $P_i \ne i$. حال می گوییک جایگشت P دارای شرط c_i می باشد اگر $P_i = i$ باشد. واضح است که $N(c_i) = (n-1)!$، $N(c_i c_j) = (n-2)!$، ... و $N(c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k}) = (n-k)!$. پس

$$S_0 = n! - n \times (n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \dots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

و با فاکتور گیری از $n!$ داریم:

رابطه (2)
$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

به هر جایگشت از اعداد **1** تا n که هیچ عددی در جای خودش قرار نگیرد یک پریش از اعداد **1** تا n می گوییم. با استفاده از رابطه ی **1** می توانید ثابت کنید به ازای n های بزرگ: $\frac{D_n}{n!} \cong \frac{1}{e}$.

مثال. فرض کنید $B_n = \{1,2,\ldots,n\}$ و $B_m = \{1,2,\ldots,m\}$. تعداد توابع پوشای $f : B_n \to B_m$ را بیابید.

حل. می گوییم تابع $f : B_n \to B_m$ دارای شرط c_i است $(i = 1, \ldots, m)$ اگر برد تابع f شامل i نباشد. در این صورت به وضوح داریم:

$$S_k = \binom{m}{k}(m-k)^n$$

بنابراین طبق اصل شمول و عدم شمول تعداد توابع پوشا از B_n به B_m برابر است با

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k S_k = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \binom{m}{k}(m-k)^n$$

$$= \binom{m}{0}m^n - \binom{m}{1}(m-1)^n + \binom{m}{2}(m-2)^n - \ldots$$

مثال. جایگشت $x_1 x_2 \ldots x_{2n-1} x_{2n}$ از مجموعه ی $S = \{1,2,\ldots,2n-1,2n\}$ را در نظر بگیرید. این جایگشت دارای خاصیت P است اگر به ازای حداقل یک $1 \le i \le 2n-1$ داشته باشیم $|x_i - x_{i+1}| = n$.

ثابت کنید به ازای هر n، تعداد جایگشت های دارای خاصیت P از تعداد جایگشت هایی که این خاصیت را ندارند بیشتر است.

حل. قبلا، این مساله را با استفاده از تناظر یک به یک حل کردیم. در این فصل قصد داریم با استفاده از اصل شمول و عدم شمول راه حل دیگری برای مساله بیابیم.

فرض کنید A_k $(k \in \{1, 2, \dots, n\})$ مجموعه ی همه ی جایگشت های مجموعه ی S باشد که در آنها زوج متناظر k و $n + k$ متوالی هستند. پس $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ ، مجموعه ی همه ی جایگشت های مجموعه S است که دارای خاصیت P می باشند. طبق اصل شمول و عدم شمول

رابطه (2)

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} |A_k| - \sum_{k<l\le n} |A_k \cap A_l| + \sum_{k<l<m\le n} |A_k \cap A_l \cap A_m| - \dots$$

با توجه به این که این سری یک سری نزولی است، در نتیجه:

$$|A| \ge \sum_{k=1}^{n} |A_k| - \sum_{k<l\le n} |A_k \cap A_l|$$

می دانیم $|A_k| = 2\times(2n-1)!$ و $|A_k \cap A_l| = 2^2 \times (2n-2)!$. (چرا؟) در نتیجه

$$|A| \ge 2n(2n-1)! - 4\times\left[\begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix}\right](2n-2)! \ge 2n^2(2n-2)! > \frac{(2n)!}{2}$$

پس تعداد جایگشت های دارای خاصیت P از نصف تعداد کل جایگشت های مجموعه ی S بیشتر است. در نتیجه تعداد جایگشت های دارای خاصیت P از تعداد جایگشت های بدون خاصیت P بیشتر است.

با استفاده از کل سری می توانید ثابت کنید به ازای n های بزرگ، $\frac{|A|}{(2n)!} \cong 1 - e^{-1} \cong 0.632$

مثال. تعداد زیر مجموعه های k عضوی $\{1, 2, \dots, n\}$ را بیابید که شامل هیچ دو عضو متوالی دوری نباشند. (عدد $1 < i < n$ با اعداد $i - 1$ و $i + 1$ متوالی دوری است. همچنین **1** و n هم متوالی دوری حساب می شوند.)

حل. فرض کنید a_i برابر تعداد زیر مجموعه های مطلوب k عضوی باشد که شامل i می باشند. بـه دلیل تقارن $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. پس a_1 را می شماریم.

اگر B یک زیر مجموعه ی مطلوب k عضوی باشد که دارای عنـصر "1" اسـت، طبـق فـرض مـسا له $2, n \notin B$. حال باید $k - 1$ عضو باقی مانده را بررسی کنیم .می دانیم تعداد این زیر مجموعه ها برابـر است با تعداد زیر مجموعه های $k - 1$ عضوی یک مجموعه ی $n - k - 1$ عضوی. در نتیجه

$$a_1 = \binom{n-k-1}{k-1}.$$

در نتیجه تعداد مجموعه های مطلوب k عضوی برابر است با:

$$A_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{k} a_1 = \frac{n}{k}\binom{n-k-1}{k-1}$$

دقت کنید که چون هر مجموعه k بار در عبارت $\sum_{i=1}^{n} a_i$ شمرده شده است $A_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} a_i$.

مثال. به چند طریق n زوج $(n > 1)$ می توانند دور یک میز گرد بنشینند به طوری کـه زن هـا و مردها یک در میان بنشینند و هیچ مردی کنار همسر خود ننشسته باشد؟

حل. فرض کنید زن زوج i ام W_i و همسر وی M_i باشد. ابتدا زن ها به $(n - 1)!$ طریـق دور میـز مـی نـشینند. فـرض کنیـد زن هـا بـه ترتیـب $W_1, W_2, \ldots, W_n$ نشـسته باشـند. حـال ویژگـی های $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$ را به این صورت تعریف می کنیم. یک حالت نشستن

- دارای ویژگی P_{2i-1} است $\Leftrightarrow$ M_i سمت راست W_i نشسته باشد.
- دارای ویژگی P_{2i} است $\Leftrightarrow$ M_i سمت چپ W_i نشسته باشد.

واضح است که ویژگی P_i و P_{i+1} نمی توانند هم زمان اتفاق افتاده باشند، پس اگر تعریف کنیم: $P_{2n+1}=P_1$ داریم: $N(P_iP_{i+1})=0$ $(i=1,2,\dots,2n)$. همچنین اگر $N(P_{i_1}P_{i_2}\dots P_{i_k})=0$ باشد، آنگاه زیر مجموعه ی $\{i_1,i_2,\dots,i_k\}$ شامل دو عضو متوالی دور دایره است. همچنین

- به ازای هر عدد طبیعی k $(n<k\le 2n)$،

$$N(cp_{i_1}cp_{i_2}\dots cp_{i_k})=0 \Rightarrow S_k=0$$

- به ازای هر عدد طبیعی k، $1\le k\le n$، داریم

$$S_k=\sum N(cp_{i_1}cp_{i_2}\dots cp_{i_k})=\frac{2n}{k}\binom{2n-k-1}{k-1}\times(n-k)!$$

زیرا هر مردی می تواند سمت راست یا چپ همسر خود بنشیند. بنابراین $2n$ جا داریم که باید k جای آنها را برای k مردی که کنار همسران خود می نشینند انتخاب کنیم به طوری که هیچ دو جایی متوالی دوری نباشند. طبق مساله ی قبل این کار را به $\frac{2n}{k}\binom{2n-k-1}{k-1}$ طریق می توانیم انجام دهیم.

حال با انتخاب k جا، مردهایی هم که باید در این جاها بنشینند به صورت یکتا تعیین می شوند و بقیه ی مردها هم به $(n-k)!$ طریق در جاهای باقی مانده می توانند بنشینند.

بنابراین

$$E_0=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2n}{k}\binom{2n-k-1}{k-1}(n-k)!$$

$$E_0=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!$$