

اصل لانه کبوتری

ساده ترین صورت از اصل لانه کبوتری که اصل حجره ها نیز نامیده می شود به شکل زیر است:

اگر $n + 1$ قطعه الماس درون n جعبه توزیع شوند آنگاه حداقل یک جعبه شامل بیش از یک الماس است.

البته این اصل به این صورت نیز بیان می گردد که: $n + 1$ کبوتر که می خواهند در n لانه بنشینند آنگاه حداقل یک لانه شامل بیش از یک کبوتر خواهد بود.

این اصل ترکیباتی ساده اولین بار توسط دیریکله (1805 – 1895) در نظریه اعداد مورد استفاده قرار گرفت. این اصل بسیار ساده برخلاف انتظار، کاربردهای بسیاری دارد و با استفاده از آن قضایای مهمی به اثبات می رسند.

فرانک رمزی یکی از کسانی بود که تعمیم های وسیعی از این اصل ارائه کرد. امروزه مبحث «اعداد رمزی» یکی از بخش های مهم در علم ترکیبیات است و بد نیست بدانید که پیشرفت در این شاخه به کندی صورت می گیرد و مسائل مبارزه طلب هر روز در آن بیشتر می شوند.

اغلب فهمیدن این موضوع که در کجا باید از اصل لانه کبوتری استفاده کرد کار سختی نیست، به عنوان مثال در مسائل وجودی مربوط به مجموعه های متناهی (و در بعضی موارد نامتناهی) این اصل می تواند کارساز باشد. کار مشکل در این بین پیدا کردن الماس ها و جعبه ها (حجره ها) می باشد!

برای آشنایی بد نیست به چند مسئله بدون حل در این موارد توجه کنید.

1. در بین سه نفر حتماً دو نفر با یک جنسیت وجود دارند.

2. در بین 13 نفر حتماً دو نفر هستند که در یک ماه متولد شده‌اند.

3. هیچ شخصی بیشتر از 300000 تار مو در سر خود ندارند. پایتخت کشورمان ایران بیش از

300000 نفر جمعیت دارد، آیا می‌توانید با اطمینان بگویید که دو نفر در این شهر هستند که

تعداد موهای سرشان برابر است؟

4. چند نفر لازم می‌دانید که مطمئن باشید که دو نفر آنها در یک روز هفته متولد شده‌اند.

5. اگر q الماس درون s جعبه به دلخواه توزیع شوند. آنگاه حداقل یک جعبه شامل بیش

از q الماس است.

6. خط l در صفحه مثلث ABC قرار دارد به طوری که از رؤس مثلث عبور نمی‌کند. نشان دهید

خط l نمی‌تواند تمام اضلاع مثلث را قطع کند.

7. یک صفحه از هیچ رأس از یک چهاروجهی منتظم نمی‌گذرد. این صفحه حداکثر چند ضلع از

چهاروجهی را قطع می‌کند؟

8. یک صفحه هدف به شلیک مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع 2 است.

الف. نشان دهید اگر 5 بار با تیر به آن بزنیم دو سوراخ روی آن است که فاصله آنها کمتر یا

مساوی 1 است.

ب. اگر 17 بار با تیر به این هدف بزنیم کمترین فاصله بین سوراخ‌ها حداکثر چقدر می‌تواند

بزرگ باشد؟

9. دوره تناوب نمایش اعشاری کسر $\frac{a}{b}$ که a و b نسبت به هم اولند. حداکثر برابر $(b - 1)$

است.

10. یازده عدد اعشاری با نمایش نامتناهی داریم، نشان دهید می توان دو تا از آنها مانند a و b

پیدا کرد به طوری که نمایش $|a - b|$ متناهی باشد یا نامتناهی صفر داشته باشد.

11. 12 عدد دورقمی متمایز داریم، نشان دهید دو تا از آنها موجودند به طوری که تفاضلشان

عددی به شکل aa است.

12. اگر هیچ کدام از اعداد $a, a + d, \dots, a + (n - 1)d$ بر n بخش پذیر نباشند آنگاه d و n

نسبت به هم اولند (یعنی ب. م. م آنها یک است).

مثال های بعد پاره ای کاربردهای خاص تر از اصل لانه کبوتری را نشان می دهند.

مثال. n نفر در یک اتاق حاضر هستند. نشان دهید در بین آنها دو نفر وجود دارند که تعداد

دوستانشان در این اتاق برابر است.

حل. n جعبه با شماره های $0, 1, \dots, n - 1$ در نظر می گیریم. اسم یک نفر را درون جعبه شماره نه

قرار می دهیم اگر او در بین افراد حاضر در اتاق نه دوست داشته باشد. بنابراین n نفر و n جعبه داریم،

جعبه های شماره 0 و $n - 1$ همزمان نمی توانند پر باشند زیرا اگر شخصی باشد که با $n - 1$ نفر دوست باشد

یعنی با همه افراد اتاق (غیر از خودش) دوست باشد دیگر شخصی با تعداد صفر دوست در اتاق وجود ندارد.

پس n نفر در $n - 1$ جعبه قرار گرفته اند، پس یک جعبه موجود است به طوری که شامل حداقل دو نفر است.

پس دو نفر وجود دارند که تعداد دوستانشان با هم برابر است.

مثال. یک تنیس باز 77 روز فرصت دارد تا خود را برای یک مسابقه مهم آماده کند او می خواهد در هر روز اقلأ یک بار به طور تمرینی با دوستش بازی کند ولی در طول این مدت دقیقاً 132 بازی تمرینی انجام دهد. نشان دهید با این فرضیات حتماً دنباله ای از روزهای متوالی وجود دارند که طی آنها دقیقاً 21 بازی انجام داده است.

حل. فرض کنید a_i تعداد بازی هایی باشد که تا روز i ام انجام داده است. در این صورت

$$1 \leq a_1 < L < a_{77} \leq 132$$

در نتیجه

$$22 \leq a_1 + 21 < a_2 + 21 < L < a_{77} + 21 \leq 153$$

بنابراین دو عدد از بین 154 عدد a_1, \dots, a_n و $a_1 + 21, \dots, a_n + 21$ برابرند. در نتیجه دو اندیس

متمایز، i و j ($j > i$) وجود دارند به طوری که $a_j = a_i + 21$. پس این شطرنج باز در طول روزهای

$i + 1, i + 2, \dots, j$ روی هم 21 بازی انجام داده است.

مثال. فرض کنید a_1, a_2, \dots, a_n, n عدد صحیح نه لزوماً نامساوی باشند. در این صورت

زیرمجموعه ای از این اعداد وجود دارد که مجموع اعضایش بر n بخش پذیر است.

حل. n عدد صحیح را در نظر بگیرید

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2 + \dots, s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

اگر یکی از s_i ها بر n بخش پذیر باشد حکم مسأله ثابت شده، فرض کنید این طور نباشد و باقیمانده های

n عدد صحیح فوق به هنگ n متفاوت باشد. چون برای باقیمانده‌های آنها در تقسیم بر n ، $n - 1$ امکان مختلف وجود دارد، دو تا از این اعداد مانند s_p, s_q ($p < q$) وجود دارند که باقیمانده آنها به هنگ n برابر است، بنابراین تفاضل زیر بر n بخش پذیر است.

$$s_q - s_p = a_{p+1} + \dots + a_q$$

مثال. $(n + 1)$ عدد از $\{1, 2, \dots, 2n\}$ انتخاب شده است، نشان دهید از میان اعداد انتخاب شده یکی بر دیگری بخش پذیر است.

حل. فرض کنید $n + 1$ عدد مفروض a_1, a_2, \dots, a_{n+1} باشند، آنها را به شکل $a_i = 2^{k_i} b_i$ می‌نویسیم که b_i عددی فرد باشد. در این صورت b_1, b_2, \dots, b_{n+1} عدد فرد می‌باشند که بین 1 و $2n$ قرار دارند و چون در این بازه n عدد فرد بیشتر نداریم پس دو تا از b_i ها مانند b_p و b_q برابرند، بنابراین از دو عدد a_p و a_q یکی بر دیگری بخش پذیر است.

مثال. فرض کنید $a, b \in \mathbb{N}$ دو عدد نسبت به هم اول باشند. در این صورت x, y ای متعلق به \mathbb{N} وجود دارند به طوری که $ax - by = 1$.

حل. اعداد $a, 2a, \dots, (b-1)a$ را در نظر بگیرید، هیچ کدام از این اعداد طبق فرض بر b بخش پذیر نیستند، زیرا اگر یکی از این اعداد مانند a بر b بخش پذیر باشد چون a و b بخش پذیر باشند، نتیجه می‌شود i بر b بخش پذیر است اما i عددی بین 1 و $b-1$ است و چنین چیزی غیرممکن است. بنابراین اگر باقیمانده این $b-1$ عدد را در تقسیم بر b در نظر بگیریم، باقیمانده صفر ظاهر نمی‌شود. از طرفی هیچ کدام از این $b-1$ عدد باقیمانده یکسان ندارند زیرا اگر مثلاً pa

و qa ($p > q$) باقیمانده یکسان داشته باشند نتیجه می‌شود $pq - qa$ بر b بخش پذیر است یعنی $a(p - q)$ بر b بخش پذیر است و چون a و b بخش پذیر است و چون a و b نسبت به هم اول می‌باشند نتیجه می‌شود $p - q$ بر b بخش پذیر است ولی این عدد از b کمتر است و چنین چیزی ممکن نیست.

پس مجموعه باقیمانده‌های $a, 2a, \dots, (b - 1)a$ در تقسیم بر b با مجموعه $\{1, 2, \dots, b - 1\}$ برابر است، در نتیجه عددی مانند xa وجود دارد که در تقسیم بر b باقیمانده برابر یک دارد یعنی $xa - 1$ بر b بخش پذیر است و این یعنی $xa - 1 = by$ یا $ax - by = 1$.

تعمیم اصل لانه کبوتری به این صورت است که: اگر $m \cdot n + 1$ کبوتر بخواهند در n لانه بنشینند لاقل در یک لانه لاقل $m + 1$ کبوتر خواهد نشست.

مثال. (اردوش و زکریس) اعداد 1 تا 101 را به ترتیبی دلخواه در یک سطر نوشته‌ایم. نشان دهید می‌توان 11 تا از آنها را بدون برهم زدن ترتیبشان در نظر گرفت به طوری که ترتیب آنها یکنوا (صعودی یا نزولی) باشد.

حل . حال کلیتری از این مثال به شرح زیر است که سعی می‌کنیم آن را اثبات کنیم. اگر $n = (p - 1)(q - 1)$ و دنباله‌ای n تایی از اعداد صحیح داشته باشیم در این صورت می‌توان زیر دنباله‌ای صعودی با طول p یا زیر دنباله‌های نزولی با طول q از آن پیدا کرد.

دنباله داده شده از n عدد را در نظر بگیرید، فرض کنید $1 \leq m \leq n, L_m$ ، نشان‌دهنده طول بزرگترین زیردنباله صعودی باشد که به m امین عضو دنباله ختم شده است و R_m نشان‌دهنده طول بزرگترین زیر دنباله نزولی با شروع از m امین عضو دنباله باشد.

ادعا می‌کنیم اگر k و m دو عدد با این شرط که $1 \leq k \neq m \leq n$ باشند آنگاه حتماً یکی از دو رابطه $R_m \neq R_k$ یا $L_m \neq L_k$ اتفاق می‌افتد. زیرا با $m > k$ یا $m < k$ فرض کنید $m > k$. حال بر حسب این که عضو m ام دنباله از عضو k ام دنباله بزرگتر باشد یا کوچکتر، داریم $L_k < L_m$ یا $R_k > R_m$. در حالت $m < k$ نیز اتفاقات مشابهی رخ خواهد داد. بنابراین ادعای گفته شده ثابت می‌شود.

بنابراین تمام زوج‌های (L_m, R_m) ($m = 1, 2, \dots, n$) متفاوت‌اند. حال فرض کنید که هیچ کدام از دو مورد گفته شده در حکم مسأله رخ ندهد. در این صورت L_m می‌تواند تنها مقادیر $1, 2, \dots, p-1$ و R_m می‌تواند تنها مقادیر $1, 2, \dots, q-1$ را اختیار کند. بنابراین به تعداد $(q-1)(p-1)$ جعبهٔ مختلف داریم که $n = (p-1)(q-1)$ تا زوج در آنها قرار دارند ولی این تناقض است زیرا به این معنا است که دو تا از زوج‌های (L_m, R_m) با هم برابرند (طبق اصل لانه کبوتری).

مثال 5. نقطهٔ شبکه‌ای در صفحه انتخاب شده‌اند. نشان دهید می‌توان دو تا از این نقاط را در نظر گرفت به طوری که روی پاره‌خط واصل میان آن دو، نقطهٔ شبکه‌ای دیگری موجود باشد.
توضیح. نقاط شبکه‌ای در صفحه نقاطی هستند که مختصات آنها صحیح می‌باشد.

حل. در اینجا الگوی مختصات نقاط صفحه را از نظر زوجیت در نظر می‌گیریم، چهار حالت بیشتر نداریم که عبارتند از: (زوج و زوج)، (فرد و زوج)، (زوج و فرد) و (فرد و فرد). حال چون 5 نقطه داریم طبق اصل لانهٔ کبوتری حداقل دو تا از آنها مانند $A = (a, b)$ و $B = (c, d)$ زوجیت مؤلفه‌هایشان یکسان است.
 نقطهٔ وسط AB به نام L را در نظر بگیرید، داریم

$$L = \left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2} \right)$$

چون زوجیت a ، c و همچنین b ، d یکسان است L نیز نقطه‌ای شبکه‌ای خواهد بود.

مثال. در دنباله $1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, \dots$ با شروع از مرتبه سوم هر جمله رقم یکسان مجموع دو

جمله قبلی‌اش است. نشان دهید دنباله متناوب است و ماکزیمم طول ممکن برای دوره تناوب را بیابید.

حل. هر دو جمله متوالی از دنباله را که در نظر بگیرید تمامی جملات قبل و بعد را به طور یکتا

مشخص می‌کنند، بنابراین برای این که نشان دهیم دنباله متناوب است کافی است نشان دهیم یک زوج

متوالی از جملات مانند (a, b) تکرار می‌شود و در ضمن اولین زوج تکرار شونده $(1, 1)$ و $(1, 2)$ است. 101 جمله

اول این دنباله را در نظر بگیرید آنها 100 زوج $(1, 1)$ ، $(1, 2)$ ، $(2, 3)$ و ... را درست می‌کنند، چون زوج

$(0, 0)$ تکرار نمی‌شوند (زیرا این مطلب باعث می‌شود که همه جملات دنباله بر 10 بخش پذیر باشند) تعداد

حالت‌های ممکن برای یک زوج متوالی مانند (a, b) برابر $10^2 - 1$ یعنی 99 است و در نتیجه طبق اصل لانه

کبوتری در بین 100 زوج اول حداقل یک زوج تکرار می‌شود و در نتیجه دوره تناوب حداکثر 99 است.

مثال. دنباله فیبوناتچی به شکل زیر تعریف می‌شود

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \quad n > 1$$

نشان دهید به ازای هر n عددی از دنباله فیبوناتچی یافت می‌شود که به n تا صفر ختم می‌شود.

حل. جمله a_p به n صفر ختم می‌شود اگر و تنها اگر a_p بر 10^n بخش پذیر باشد یعنی

$a_p = 0 \pmod{10^n}$ بنابراین باید دنباله فیبوناتچی را به هنگ 10^n در نظر بگیریم و نشان دهیم که در بین

باقیمانده‌ها ظاهر می‌شود. $10^{2n} + 1$ جمله اول دنباله فیبوناتچی یعنی a_1, a_2, a_3, \dots را در نظر بگیرید. با استفاده از آنها می‌توان 10^{3n} جفت $(a_1, a_2), (a_2, a_3), \dots$ را درست کرد که اگر قرار باشد هیچ a_i ای بر 10^n بخش پذیر نباشد زوج $(0, 0)$ در میان این جفت‌ها به هنگ 10^n ظاهر نمی‌شود. اما صرف نظر از زوج $(0, 0)$ از لحاظ باقیمانده به هنگ 10^n ، $10^{2n} - 1$ امکان برای زوج‌ها وجود دارد. بنابراین یک جفت تکرار می‌شود. پس طول دوره تناوب دنباله به هنگ 10^n حداکثر $10^{2n} - 1$ است. همانند مثال 8، اولین جفت کمه تکرار می‌شود $(1, 1)$ است، به شکل زیر

$$\begin{matrix} 1, 1, 2, 3, L, a_i, 1, 1, L \\ 1 \ 442 \ 4 \ 43 \end{matrix}$$

که i طول دوره تناوب است. در نتیجه داریم $1 \equiv 1 + a_p \pmod{10^n}$ یا $a_p \equiv 0 \pmod{10^n}$ یعنی a_p بر 10^n بخش پذیر است.

مثال. فرض کنید a عددی طبیعی باشد که نسبت به 2 و 5 اول است. نشان دهید به ازای هر n می‌توان توانی از a پیدا کرد که به $00K01$ ختم می‌شود.

حل. 10^n عدد $a, a^2, a^3, \dots, K, a^{10^n}$ را در نظر بگیرید. اگر باقیمانده آنها را به هنگ 10^n بررسی کنیم درمی‌یابیم که باقیمانده هیچ کدام برابر صفر نیست زیرا a و 10 نسبت به هم اول هستند. بنابراین باقیمانده‌های این 10^n عدد از مجموعه $\{1, 2, \dots, (10^n - 1)\}$ می‌باشند. طبق اصل لانه کبوتری دو تا از آنها مانند a_1 و a_k ($i < k$) به هنگ 10^n باقیمانده یکسانی دارند در نتیجه تفاضل آنها بر 10^n بخش پذیر است یعنی

$$10^n \mid a^k - a^i \quad \text{و} \quad 10^n \mid a^i (a^{k-i} - 1)$$

اما $(10^n, a^i) = 1$ پس $10^n \mid a^{k-i} - 1$ در نتیجه $q \in$ وجود دارد که $a^{k-i} - 1 = q \times 10^n$ حال

داریم $a^{k-i} = q \times 10^n + 1$ ، اگر کمی دقت کنید خواهید دید که این تساوی بدین معناست که a^{k-i} به

ختم می شود. $\frac{10^k - 1}{10^n - 1}$

مثال. درون یک اتاق به مساحت 5 متر مربع، 9 قالیچه به مساحت یک مترمربع و با شکل دلخواه پهن

کرده ایم. (ممکن است قالیچه‌ها مستطیل شکل نباشند) نشان دهید دو قالیچه وجود دارند که به اندازه

حداقل $\frac{1}{9}$ مترمربع اشتراک دارند.

حل. فرض کنید حکم درست نباشد یعنی اشتراک هر دو قالیچه کمتر از $\frac{1}{9}$ مترمربع مساحت داشته

باشد. قالیچه‌ها را یکی یکی مطابق الگوی اولیه در اتاق می‌اندازیم. قالیچه اول مساحتی به اندازه یک متر

مربع یا $\frac{9}{9}$ را می‌پوشاند، قالیچه دوم مساحتی به اندازه بزرگتر از $\frac{8}{9}$ را به مساحت قبلی اضافه می‌کند، ... به

همین ترتیب قالیچه آخر مساحتی به اندازه بزرگتر از $\frac{1}{9}$ را اضافه می‌کند، پس مجموع مساحتی که کل

قالیچه‌ها می‌پوشانند بزرگتر از $\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \dots + \frac{9}{9} = 5$ است، این بدان معنی است که مساحت اتاق از 5 بیشتر

است که تناقض است.