

روابط بازگشتی

روابط بازگشتی اولیه:

آنچه در مباحث قبل دربارهٔ دنباله‌ها خواندیم، در حقیقت حالت خاصی از روابط بازگشتی به شمار می‌آید.

همان طور که پیشاپیش گفته شد رابطه‌ای را بازگشتی می‌نامیم که در آن برای محاسبهٔ هر عنصر نیاز به مقادیر تعدادی از عناصر قبلی آن داشته باشیم و براساس آنها بیان شده باشد.

نقطهٔ مقابل رابطهٔ بازگشتی رابطهٔ صریح می‌باشد که در آن با دانستن شمارهٔ عنصر مستقیماً مقدار آن توسط تابع صریح آن پیدا می‌گردد.

رابطه بازگشتی را به صورت کلی به صورت

$$u_n = F(u_{n-1}, u_{n-2}, \mathbf{L})$$

بیان می‌کنند (اگر u_i ها عناصر دنبالهٔ مزبور باشند).

رابطه بازگشتی مرتبهٔ 2:

به رابطه‌ای به صورت:

$$x_n = px_{n-1} + qx_{n-2} \quad (q \neq 0), \quad p \in Q$$

رابطهٔ بازگشتی از مرتبهٔ 2 می‌گویند.

دقت کنید p و q ضرایب ثابت در این رابطه می‌باشند و اگر چه $q \neq 0$ است ولی اگر q را مساوی صفر

بگیریم دنباله به یک تصاعد هندسی تبدیل می‌شود.

به طور کلی یک راه برای پیدا کردن جواب صریح معادلات بازگشتی که آن را «حل کردن رابطه»

بازگشتی» می‌نامند، نخست حدس زدن فرم جواب x_n است.

در این سوال بدون آنکه به شما بگوییم چگونه و چرا جوابی به شکل $x_n = I^n$ را در نظر می‌گیریم و

سعی می‌کنیم I مناسب را بیابیم تا در رابطه

$$x_n = p x_{n-1} + q x_{n-2}$$

صدق کند.

اگر I صدق کند خواهیم داشت:

$$I^n = p I^{n-1} + q I^{n-2}$$

$$\Rightarrow I^2 = p I + q$$

$$\Rightarrow I^2 - p I - q = 0$$

این معادله را معادله مشخصه آن رابطه می‌نامیم.

$$\Rightarrow I_1, I_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

که صرف نظر از محاسبه I_1 و I_2 خواهیم داشت:

$$x_n = u I_1^n + v I_2^n$$

آنچه تاکنون آمد اساس حل روابط بازگشتی همگن و ناهمگن خواهد بود.

نکته. اگر $I_1 = I_2$ باشد (ریشه مضاعف) آنگاه معادله آیا به صورت

$$x_n = a I_1^n + b I_2^n = (a+b) I_1^n$$

در خواهد آمد؟

خبر. در این صورت جواب صریح معادله به صورت زیر خواهد بود.

$$x_n = (a + b n) I^n$$

در رابطه نهایی گفته شده همان طور که دیده می شود کماکان a و b مجهول اند که با مقدارهای اولیه

x_n ، می توان آنها را پیدا کرد.

مثال. داریم

$$\begin{cases} x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} \\ x_0 = x_1 = 1 \end{cases}$$

معادله را حل کنید.

حل.



$$x_n = I^n$$

$$\Rightarrow I^n = 2I^{n-1} + I^{n-2}$$

$$\Rightarrow I^2 = 2I + 1$$

$$\Rightarrow I^2 - 2I - 1 = 0$$

$$\Rightarrow I = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x_n = a(1 + \sqrt{2})^n + b(1 - \sqrt{2})^n$$

$$\begin{cases} x_0 = a(1 + \sqrt{2})^0 + b(1 - \sqrt{2})^0 = a + b \\ x_1 = a(1 + \sqrt{2})^1 + b(1 - \sqrt{2})^1 = a + b + (a - b)\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ a + b + (a - b)\sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

که با حل این دستگاه a و b بدست آمده و در نتیجه رابطه صریح نیز حساب خواهد شد.

قبل از آنکه بیشتر وارد جزئیات حل روابط بازگشتی بشویم به سراغ روابط بازگشتی ساده‌تر

می‌رویم.

مثال. به چند طریق می‌توان صفحه‌ای $2 \times n$ را با موزاییک‌های 2×1 فرش کرد؟

حل. این مسئله بسیار ساده‌ای است که ممکن است آن را دیده باشید. اگر جدول $2 \times n$ را بتوان f_n

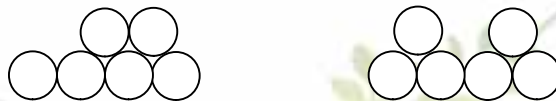
روش مختلف با موزاییک‌های $2 \times n$ فرش کرد به راحتی می‌توان ثابت کرد که $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. به این ترتیب

اگر در ستون n جدول یک موزاییک 2×1 به صورت عمودی گذاشته شود، جدولی $2 \times (n - 1)$ می ماند که باید موزاییک های 2×1 فرش شود که به f_{n-1} طریق ممکن است. در غیر این صورت دو ستون n و $n - 1$ ام با دو موزاییک 2×1 افقی پوشانده شده اند. که جدولی $2 \times (n - 2)$ می ماند که باید با موزاییک های 2×1 فرش شود که به f_{n-2} طریق ممکن است. پس در کل تعداد روش های فرش کردن جدول $2 \times n$ با موزاییک های 2×1 برابر است با $f_{n-1} + f_{n-2}$ ، یعنی $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. این رابطه، دنباله معروفی را مشخص می کند که با مقادیر اولیه $f_0 = 0$ و $f_1 = 1$ دنباله فیبوناچی نام دارد.

دقت می کنیم که رابطه $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ هر عضو دنباله را بر حسب اعضای قبلی بیان می کند، مثلاً برای پیدا کردن f_2 می توان از رابطه $f_2 = f_0 + f_1$ استفاده کرد و به دست آورد: $f_2 = 0 + 1 = 1$ حال به همین ترتیب با جمع f_1 و f_2 می توان f_3 را به دست آورد. ضمناً برای ساختن دنباله باید دو عضو اول آن را داشته باشیم تا با استفاده از آنها f_2 و f_3 و همین طور تا f_n مشخص شوند. حل رابطه بازگشتی به این معناست که ما هر عضو دنباله f_n را بدون استفاده از اعضای قبلی و مستقل از آن اعضا بیان کنیم.

مثال. n سکه یکسان 50 تومانی داریم. فرض می کنیم x_n تعداد روش هایی باشد که این n سکه را در دو ردیف افقی روی هم چنان مرتب کنیم که هر سکه در ردیف بالا، دقیقاً در زیر آن قرار گرفته باشند.

مانند:



برای محاسبه x_n رابطه بازگشتی بدست آورید.

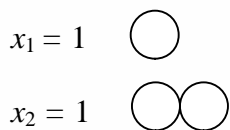
حل. در ردیف پائین سمت چپ ترین سکه را اگر در نظر بگیریم، دو حالت داریم. یا بالا و سمت راست

آن سکه‌ای قرار دارد یا نه، که اگر قرار داشته باشد، بجز این دو سکه $n - 2$ سکه دیگر قرار دارند که مستقلاً به x_{n-2} طریق می‌توانند چیده شوند و اگر قرار نداشته باشد، $n - 1$ سکه در سمت راست آن مستقلاً به x_{n-1} طریق می‌توانند چیده شوند.

یعنی $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$

که این رابطه همان رابطه بازگشتی فیبوناچی است که بعداً بیشتر به آن خواهیم پرداخت. ضمناً در

مثال بالا



مثال. مطلوب است تعیین رابطه بازگشتی برای تعداد دنباله‌های صفر و یک به طول n که هیچ دو صفر

متوالی ندارند.

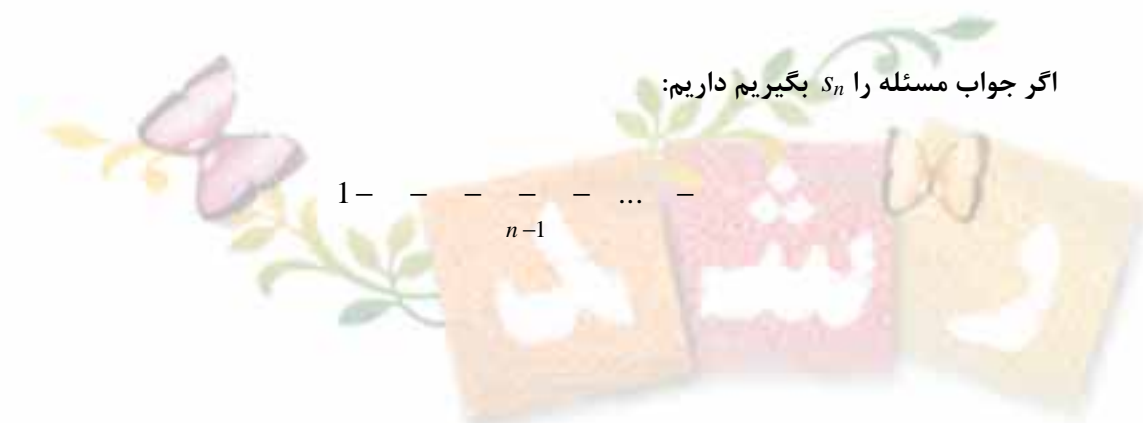
حل. می‌خواهیم رابطه بازگشتی مناسب برای آن بدست آوریم

فکر می‌کنید این بار باید چگونه بشماریم.

همان طور که تاکنون تجربه کسب کرده‌اید، باید به نحوی سایر مسئله را با حذف تعدادی عناصر

کوچکتر کرد. در این مثال نیز سمت چپ‌ترین عدد را در نظر می‌گیریم.

اگر جواب مسئله را s_n بگیریم داریم:



$$01- \quad - \quad - \quad - \quad \dots \quad - \\ n-2$$

اگر 1 باشد، آنگاه $n - 1$ رقم سمت راست آن مستقلاً به S_{n-1} طریق می‌توانند بنشینند و اگر صفر

باشد آنگاه الزاماً رقم دوم یک می‌باشد (چرا؟)

پس $n - 2$ رقم باقیمانده مستقلاً به S_{n-2} طریق می‌توانند مقادیر بپذیرند. پس در کل داریم

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$$

و چه زیبا که دوباره به رابطه بازگشتی فیبوناچی رسیدیم

$$S_1 = 2 \quad 0, 1$$

$$S_2 = 3 \quad 11, 10, 01$$

ولیکن این بار عناصر شروع با مقادیر رابطه فیبوناچی تفاوت دارند.

رابطه فیبوناچی به همین جا ختم نمی‌شود؛ به طور کلی در مبحث گسسته این رابطه به دفعات ظاهر

می‌شود.

مثال. در جزیره‌ای تعدادی خرگوش داریم. اگر S_n را تعداد خرگوش‌ها در سال n بگیریم، در هر سال

خرگوش‌های بالغ جفت‌گیری کرده و به ازای هر خرگوش بالغ یک نوزاد خرگوش به دنیا می‌آید. نوزادان نیز

یک سال طول می‌کشد تا به سن بلوغ برسند. اگر در سال اول تنها یک جفت خرگوش بالغ داشته باشیم،

رابطه S_n را بدست آورید.

حل. تعداد خرگوش‌های سال n برابر است با تعداد خرگوش‌های سال قبل آن به علاوه تعداد

بچه‌هایی که به تازگی به دنیا آمده‌اند که این تعداد برابر با تعداد خرگوش‌های بالغ سال قبل بوده و آن هم

برابر با کل خرگوش‌های دوسال قبل آن می‌باشد و این یعنی

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$$

و چه زیبا که بازهم به رابطه‌ای معادل با رابطه فیبوناچی ولی با مقادیر اولیه متفاوت رسیدیم.

$$S_1 = 2$$

$$S_2 = 4$$

پس از این همه مثال‌هایی که جواب آنها مشابه فیبوناچی می‌بود زمان آن رسیده که سعی کنیم رابطه

فیبوناچی را حل کنیم.

اگر چه بعداً حل این گونه روابط را مفصلاً می‌خوانیم ولیکن داریم:

به طور کلی جمله n ام فیبوناچی را با F_n نمایش می‌دهند

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

$$F_1 = F_2 = 1$$

مانند قبل این بار فرض می‌کنیم

$$F_n = r^n \quad r \text{ اعداد ثابت}$$



$$\Rightarrow r^n = r^{n-1} + r^{n-2}$$

$$\Rightarrow r^2 = r + 1$$

$$\Rightarrow r^2 - r - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_n = a r_1^n + b r_2^n$$

$$\Rightarrow F_n = a \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + b \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_1 = a \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + b \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1 \\ F_0 = a \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^0 + b \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

اگر از حل این رابطه بازگشتی احساس خوبی پیدا نکردید نگران نباشید.

حل کلی این معادلات جلوتر گفته خواهد شد و اکنون تنها خواستم ذهن شما را درگیر کنم. «ولیکن

خداییش حال کردید؟! دیدید فیبوناچی هم رابطه صریح داره اونم با این همه رادیکال، اولش که به ذهن آدم

نمی‌رسه».

شبکه رشد = شبکه ملی مدارس ایران



Olympiad.roshd.ir