حل روابط بازگشتی همگن

تعریف روابط بازگشتی همگن:

اگر c_i ها عددهایی حقیقی باشند، به رابطهٔ بازگشتی زیر رابطهٔ بازگشتی همگن از درجهٔ k می‌گویند:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} \qquad (1)$$

در این رابطه a_n بر حسب k جملهٔ قبل آن داده شده است و برای ساخت دنباله به k جملهٔ اول آن احتیاج داریم. تابع $g(n)$ را یک جواب دنبالهٔ بازگشتی فوق می‌نامند، اگر دنبالهٔ $a_n = g(n)$ $(n \in \mathbf{N})$ در رابطهٔ بازگشتی صدق کند.

قضیهٔ 1 (اصل برهم‌نهی) . اگر r تابع $g_1(n)$ تا $g_r(n)$ جوابی برای

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + f_i(n) \qquad (2)$$

باشند، آنگاه هر ترکیب خطی از این k جواب به صورت $A_1 g_1(n) + A_2 g_2(n) + \ldots + A_r g_r(n)$ که در آن A_i ها اعدادی حقیقی‌اند پاسخی برای رابطهٔ بازگشتی شمارهٔ (2) است. به ویژه، چون در روابط بازگشتی همگن $f_i(n) = 0$ هر ترکیب خطی جواب‌های یک رابطهٔ بازگشتی همگن باز یک جواب همان رابطهٔ بازگشتی است.

اثبات . فرض کنیم:

$$h(n) = A_1 g_1(n) + A_2 g_2(n) + \ldots + A_r g_r(n)$$

$g_i(n)$ یک جواب معادلهٔ زیر است:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + f_i(n)$$

پس داریم:

$$g_i(n) = c_1\, g_i(n-1) + c_2\, g_i(n-2) + \dots + c_k\, g_i(n-k) + f_i(n)$$

و نتیجه می‌شود:

$$h(n) = c_1\, h(n-1) + c_2\, h(n-2) + \dots + c_k\, h(n-k) + A_1\, f_1(n) + \dots + A_r\, f_r(n)$$

حل روابط بازگشتی همگن:

روابط بازگشتی همگن حل ساده‌ای دارند که بدین صورت است: اگر $g(n) = x^n$، جواب رابطهٔ بازگشتی همگن شمارهٔ (1) باشد، داریم:

$$x^n - c_1\, x^{n-1} - c_2\, x^{n-2} - \dots - c_k\, x^{n-k} = 0$$

یا به عبارت دیگر:

$$x^k - c_1 x^{k-1} - \dots c_k = 0 \qquad (3)$$

یعنی x جواب معادله درجه k فوق است. این معادله را معادلهٔ سرشت‌نما یا معادلهٔ متشکله رابطهٔ بازگشتی می‌نامیم. اگر x_i ریشهٔ معادلهٔ سرشت‌نما باشد، بدیهی است که $a_n = x_i^n$ یک جواب رابطه بازگشتی است و بنا بر قضیه ی قبلی هر ترکیب خطی از x_i^n ها هم یک جواب رابطه ی بازگشتی است. ضمناً این جواب‌ها پایه‌ای برای مجموعه جواب این رابطه می‌باشند.البته چگونگی تحقیق این مطلب به مقدماتی از جبر خطی احتیاج دارد که به عهدهٔ شما خواهد بود. با اثبات این مطلب می‌توان گفت: تمام

جواب‌های رابطه (1) به صورت ترکیبی خطی از x_i^n ها است. (چگونگی اثبات را تحقیق کنید) به طور مثال ترکیب خطی:

$$a_n = t_1 x_1^n + t_2 x_2^n + \cdots + t_k x_k^n \qquad (4)$$

را در نظر می‌گیریم. اگر در این صورت رابطهٔ بازگشتی k عنصر اول این دنباله داده شده باشند، باید k معادلهٔ زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} a_0 = t_1 + \cdots + t_k \\ a_1 = t_1 x_1 + \cdots + t_k x_k \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{k-1} = t_1 x_1^{k-1} + \cdots + t_k x_k^{k-1} \end{cases}$$

این یک دستگاه k معادله و k مجهول می‌باشد. (مجهول‌ها t_1 تا t_k هستند.) با توجه به تشکیل دترمینان ضرایب، این نتیجه به دست می‌آید که اگر x_iها متمایز باشند این دستگاه معادلات یک جواب منحصر به فرد دارد، یعنی با دادن k عنصراول دنباله، می‌توان جوابی منحصر به فرد برای دنباله پیدا کرد. (تحقیق کنید چرا در صورت متمایز بودن x_iها این دستگاه معادلات یک جواب منحصر به فرد دارد! برای این کار باید دترمینان ماتریس ضرایب را تشکیل دهیم.)

مثال. دنبالهٔ فیبوناچی که در مثال‌های قبل تعریف شده است، را حل کنید.

دنبالهٔ فیبوناچی : $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ **در حالی که** $F_1 = F_2 = 1$.

حل. **معادلهٔ سرشت‌نمای این رابطه به صورت** $x^2 - x - 1 = 0$ **است و ریشه‌های آن** $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

و $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ **است. پس:**

$$f_n = t_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + t_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

و با توجه به مقادیر اولیه داریم:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = f_0 = 0 \\ t_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + t_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = f_1 = 1 \end{cases}$$

و از این معادله‌ها نتیجه می‌شود:

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \ , \ t_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \qquad (5)$$

قابل توجه است، جملهٔ $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ **با بزرگتر شدن** n **بسیار کوچک می‌شود و با توجه به اینکه** f_n **عددی حسابی است، اگر** (x) **را نزدیکترین عدد صحیح به** x **تعریف کنیم، داریم:**

$$(x) = [x + \frac{1}{2}]$$

و با این تعریف:

$$f_n = \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\rangle \qquad (6)$$

در یافتن جواب‌های دستگاه به دست آمده برای یافتن ضرایب، این شرط را قرار دادیم که x_iها متمایز باشند. حال اگر x_i ریشهٔ مضاعف درجهٔ 2 معادلهٔ سرشت‌نما باشد، به راحتی قابل تحقیق است که $a_n = n\, x_i^n$ نیز یک جواب رابطهٔ بازگشتی است (اثبات با مشتق‌گیری از معادلهٔ سرشت‌نما است، به این وسیله که ریشهٔ مضاعف، ریشهٔ مشتق معادلهٔ سرشت‌نما است.) به همین طریق می‌توان استدلال کرد که اگر x_i ریشهٔ مضاعف درجهٔ 3 باشد، $n^2 x_i^n$ نیز یک جواب رابطهٔ بازگشتی است. در حالت کلی اگر x_i ریشهٔ مضاعف درجه p باشد:

$$g(n) = t_0\, x^n + t_1\, nx^n + t_2\, n^2\, x^n + \dots + t_{p-1}\, n^{p-1}\, x^n$$

جوابی برای رابطهٔ بازگشتی است.

مثال . رابطهٔ بازگشتی زیر را حل کنید:

$$A_n = -a_{n-1} + 3a_{n-2} + 5a_{n-2} + 2a_{n-3} \, (n \ge 5)$$

حل . ریشه‌های معادله سرشت‌نما به صورت زیر است:

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_n = t_1(-1)^n + t_3\, n^2 (-1)^n + t_4 2^n$$

و با معلوم بودن a_1 تا a_4 مقادیر t_1 تا t_4 به دست می‌آیند. مثلاً در حالت $a_1 = 4$ و $a_2 = -3$ و a_3

= 22 و $a_4 = -7$ از دستگاه‌های متناظر جواب‌های $t_1 = -t_3 = 1$ و $t_4 = -t_2 = 2$ به دست می‌آیند.

مثال بعد، حالتی را بررسی می‌کند که در آن معادلهٔ سرشت‌نما ریشهٔ حقیقی ندارد.

مثال. رابطهٔ بازگشتی $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}$ را حل کنید $(a_0 = 1 , a_1 = 0)$.

حل. معادلهٔ سرشت‌نما به صورت $x^2 - 2x + 2 = 0$ است که جواب غیرحقیقی زیر را دارد:

$(\bar{a} = 1 - t \ , \ a = 1 + i)$. پس داریم:

$$\begin{cases} a = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{p}{4}\right) + i\sin\left(\frac{p}{4}\right)\right) \\ \bar{a} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{p}{4}\right) - i\sin\left(\frac{p}{4}\right)\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n = A\,a^n + B\,\bar{a}^n$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^2 \left[A\left(\cos\left(\frac{np}{4}\right) + i\sin\left(\frac{np}{4}\right)\right)\right]$$

$$+ \left(\sqrt{2}\right)^2 \left[B\left(\cos\left(\frac{np}{4}\right) - i\sin\left(\frac{np}{4}\right)\right)\right]$$

$$\Rightarrow a_n = \sqrt{2}\left(C\cos\left(\frac{np}{4}\right) + D\sin\left(\frac{np}{4}\right)\right)$$

$$a_0 = 1 \ , \ a_1 = 0 \ \Rightarrow C = 1 \ , \ D = -1$$

$$\Rightarrow \ a_n = \sqrt{2}\left(\left(\cos\left(\frac{np}{4}\right) - \sin\left(\frac{np}{4}\right)\right)\right)$$

لازم به تذکر است در این معادلات از رابطهٔ مهم زیر استفاده شده است که با استفاده از استقرا ثابت

می‌شود.

$$\left(\cos q + i\ \sin q\right)^{n} = \cos\left(n q\right) + i\ \sin\left(n q\right)$$