حل روابط بازگشتی ناهمگن

تعریف روابط بازگشتی غیرهمگن با ضرایب ثابت:

رابطهٔ بازگشتی درجهٔ k زیر غیر همگن است:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \ldots + c_k a_{n-k} + f(n)$$

اگر A_n در رابطهٔ بازگشتی همگن (**1**) صدق کند و B_n در رابطه بازگشتی غیرهمگن صدق کند آنگاه

$A_n + B_n$ نیز در رابطهٔ غیرهمگن صدق می‌کند. زیرا:

$$c_1 = (A_{n-1}+B_{n-1})+ \ldots + c_k (A_{n-k} + B_{n-k}) + f(n) = (c_1 A_{n-1}+ \ldots + c_k A_{n-k})$$

$$+ (c_1 B_{n-1}+ \ldots + c_k B_{n-k} + f(n)) = A_n + B_n$$

در این حالت A_n را جواب قسمت همگن رابطه و B_n را یک جواب خاص آن گویند. مثلاً اگر

$a_n = 3 a_{n-1} + 2 - 2n^2$ ، آنگاه $A_n = t_1 3^n$ و چون $f_n = 2 - 2n^2$ ، قرار میدهیم

$B_n = p n^2 + qn + r$ ،

حال داریم:

$$pn^2 + qn + r = 3(p(n-1)^2 + q(n-1) + r) + 2 - 2n^2$$

در نتیجه، برای این که این رابطه یک اتحاد برای n باشد، داریم: $B = 1$, $C = 3$, $D = 3$ ، در این

صورت، $B_n = n^2 + 3n + 2$ و خواهیم داشت:

$$a_n = A_n + B_n = t_1 3^n + n^2 + 2$$

با فرض $a_0 = 0$ داریم: $t_1 = 1$ پس:

$a_n = 3^n + n^2 + 3n + 2$

حل روابط بازگشتی غیرهمگن:

اگر رابطهٔ بازگشتی غیرهمگن را به صورت زیر داشته باشیم:

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-1} + \ldots + c_k\, a_{n-k} + b^n P(n) \qquad (1)$$

که در آن b ثابت است و $P(n)$ چند جمله‌ای، از درجهٔ d بر حسب n باشد، برای این رابطه، مشابه روابط بازگشتی همگن معادلهٔ سرشت‌نما به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\left(x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c^k\right)(x-b)^{d+1} = 0 \qquad (2)$$

با داشتن این معادله و به دست آوردن ریشه‌های (x_i) آن مشابه قبل، جواب‌های این معادله به صورت ترکیب خطی x_i^n بیان می‌شود. (تحقیق این موضوع به عهدهٔ شما.) به طورکلی ریشه‌های معادلهٔ سرشت‌نمای یک رابطهٔ بازگشتی مشخص کنندهٔ جواب‌های رابطهٔ بازگشتی است. با داشتن این معادله سرشت‌نما برای روابط بازگشتی بسیاری از این روابط با روشی مشابه روابط بازگشتی همگن، به راحتی قابل حل است.

مثال .

الف. رابطهٔ بازگشتی $a_n = 2a_{n-1} + (n+5)\, 3^n$ را حل کنید.

ب. رابطهٔ بازگشتی $a_n = 2a_{n-1} + n$ را حل کنید.

حل .

الف. معادلهٔ سرشت‌نمای این رابطه به صورت $(x-2)\,(x-3)^2 = 0$ در می‌آید، پس:

$$a_n = t_1\, 2^n + t_2\, 3^n + t_3\, n\, 3^n$$

که با توجه به حالت‌های اولیه داده شده، می‌توان t_i ها را به دست آورد.

ب. معادلهٔ سرشت‌نما $(x-2)\,(x+1)^2 = 0$ است، پس داریم:

$$a_n = t_1\, 2^n + t_2 + t_2\, n$$

در حالت کلی معادلهٔ سرشت‌نمای رابطه بازگشتی زیر:

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \dots + c_k\, a_{n-k} + b_1^n P_1(n) + b_2^n\, P_2(n) + \dots \qquad (3)$$

به صورت:

$$\left(x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_k\right)(x-b_1)^{d_1+1}(x-b_2)^{d_2+1} \cdots = 0$$

است.

مثال . رابطهٔ بازگشتی $a_n = 2a_{n-1} + n + 2^n$ را حل کنید.

حل . معادلهٔ سرشت نمای آن به صورت $(x-2)\,(x-1)^2\,(x-2) = 0$ است. پس:

$$a_n = t_1 + t_2\, n + t_3\, 2^n + t_4\, n\, 2^n$$

و مثلاً اگر $a_0 = 0$ داریم:

$$a_n = -2 - n + 2^{n+1} + n\, 2^n$$

بدین ترتیب بسیاری از روابط بازگشتی با ضرایب ثابت حل می‌شوند.

حال با حل مسأله‌ای کاربردی به روشی دیگر در حل روابط بازگشتی توجه می‌کنیم:

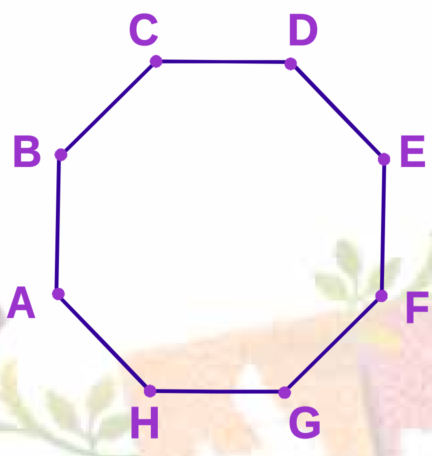
مثال. (بیست و یکمین المپیاد جهانی ریاضی) : A و E را دو رأس روبه‌روی یک 8 ضلعی منتظم

می‌گیریم، قورباغه‌ای از رأس A آغاز به جهیدن می‌کند و هربار به رأس مجاور می‌پرد. ولی وقتی به رأس E رسید، همان‌جا متوقف می‌شود. a_n را تعداد مسیرهایی می‌گیریم که قورباغه با n جهش از A به E برسد. ثابت کنید:

$$a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^{n-1} - y^{n-1}\right)$$

که در آن $x = 2+\sqrt{2}$ و $y = 2-\sqrt{2}$

حل. 8 ضلعی زیر را در نظر می‌گیریم. فرض کنید b_n تعداد مسیرهایی باشد که قورباغه در آنها با n جهش از C به E برسد. اگر قورباغه بخواهد از A به E برود، در دو جهش اول یا به C می‌رسد یا به G می‌رسد یا به A برمی‌گردد و به دو طریق می‌تواند به A بازگردد $[ABA\ ,\ AHA]$. حال از جایی که الان به آن رسیده باید شروع کند و با $n-2$ جهش به E برسد، بنابراین $a_n = 2b_{n-2} + 2a_{n-2}$. در مورد b_n نیز مشابهاً می‌توان گفت $b_n = 2b_{n-2} + a_{n-2}$ (چرا؟)



دقت می‌کنیم که چون بین A و E، 4 ضلع وجود دارد، برای رفتن از A به E حتماً تعداد زوجی حرکت لازم است. پس $a_{2n-1} = 0$. برای حالت‌های زوج دو رابطهٔ بازگشتی $a_n = 2b_{n-2} + 2a_{n-2}$ و $b_n = 2b_{n-2} + a_{n-2}$ را داریم. حال دو روش وجود دارد،

روش اول. از تفاضل دو رابطه بدست می‌آید:

$$b_{n-2} = a_{n-2} - a_{n-4}$$

و در نتیجه با گذاشتن در رابطهٔ اولی داریم:

$$a_n = 4a_{n-2} - 2a_{n-4}$$

حال اگر $c_n = a_{2n}$ در نظر بگیریم، رابطهٔ همگن $c_n = 4c_{n-1} - 2c_{n-2}$ (به ازای $n > 2$) بدست می‌آید که با توجه به حالت‌های اولیهٔ $c_1 = 0$ و $c_2 = 1$ خواهیم داشت (با تشکیل معادلهٔ سرشت‌نما و حل آن بدست می‌آید):

$$a_{2n} = c_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(2+\sqrt{2}\right)^{n-1} - \left(2-\sqrt{2}\right)^{n-1}\right)$$

حال مشابه مثال‌های قبل به دلیل اینکه $2-\sqrt{2} < 1$، می‌توان تحقیق کرد:

$$f_n = \frac{\left(2+\sqrt{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{2}} \qquad (4)$$

روش دوم. این روش با آنچه تا به حال گفتیم متفاوت است. ما به این روش در حل این مسأله بسنده می‌کنیم:

$$a_n = 2a_{n-2} + 2b_{n-2}$$

$$b_n = a_{n-2} + 2b_{n-2}$$

حال اگر بردار V_m را به صورت $V_m = \begin{pmatrix} a_{2m} \\ c_{2m} \end{pmatrix}$ تعریف کنیم، باید داشته باشیم:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ T = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

برای تعیین بردار V_m با این حالت خاصیت مقادیر ویژهٔ ماتریس T را تعیین مــی‌کنــیم. ایــن مقــادیر ریشه‌های معادلهٔ مفسر ماتریس می‌باشند :

$$\begin{vmatrix} 2-l & 2 \\ 1 & 2-l \end{vmatrix} = l^2 - 4l + 2 = 0$$

و بنابراین: $l_1 = 2+\sqrt{2}$ و $l_2 = 2-\sqrt{2}$. بردارهای ویــژهٔ مــاتریس T، یعنــی u_1 و u_2 دارای ایــن ویژگی هستند که: $T u_i = l_i u_i$ و $T(T u_i) = l_i^2 u_i$ و .... که برای $i = 1 , 2$ می‌توان آنهــا را پیــدا کرد:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\ ,\ \ u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

بنابراین V_1 یک ترکیب خطی از u_1 و u_2 است. یعنی:

$$V_1 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$$

$$\Rightarrow V_m = T^{(m-1)} V_1 = l_1^{m-1} u_1 + l_2^{m-1} u_2 = \begin{pmatrix} a_{2m} \\ b_{2m} \end{pmatrix}$$

و بدین ترتیب:

$$\Rightarrow a_{2m} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\left(2+\sqrt{2}\right)^{m-1} + \left(2-\sqrt{2}\right)^{m-1}]$$