افراز اعداد صحیح

به تساوی های زیر دقت کنید:

4=1+1+1+1 و **4=1+1+2** و **4=1+3**

4=2+2 و **4=4**

می بینیم که **4** را می توان به پنج طریق به صورت مجموع چند عدد طبیعی نوشت. به هر کدام از مجموع های فوق یک افراز عدد **4** می گوییم. به طور دقیق هر افراز عدد طبیعی عبارت است از دنباله ی غیر نزولی از اعداد $n_1 \le n_2 \le ... \le n_r$ به قسمی که $n_1 + n_2 + ... + n_r = n$ دقت کنید که ترتیب نوشتن عاملهای جمع مهم نیست. تعداد افرازهای n که با $P(n)$ نمایش می دهیم مساله ای است که با کمک توابع مولد قصد بررسی آنها را در این بخش داریم.

مثلاً $P(4)=5$

توجه کنید تعداد افرازهای عدد n را می توان این گونه بیان کرد که $P(n)$ عبارتست از تعداد راه های توزیع n شی یکسان در n جعبه یکسان.

همچنین برای هر n و s طبیعی افراز n به $n_1, n_2, ..., n_s$ (n_i ها اعدادی طبیعی و کوچکتر از n هستند) عبارتست از همه حالتهایی که مجموع برخی از n_i $(1 \le i \le s)$ برابر n شود. مثلاً افرازهای **5** به **1**و**2** عبارتند از : **1+1+1+1+1** و **1+2+2** و **1+1+1+2**.

اولین کاربرد توابع مولد در افراز اعداد را در مثال زیر می توان مشاهده کرد.

مثال. فرض کنید $T(n)$ برابر باشد با تعداد راه های افراز عدد n به **1**و**2**و**3**. تابع مولد $T(n)$ برابر است

با :

$$f(x) = (\underbrace{1+x+x^2+\dots}_{f1})(\underbrace{1+x^2+x^4+\dots}_{f2})\left(\underbrace{1+x^3+x^6+\dots}_{f3}\right)$$

$$= \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{1-x^3}$$

برای $1 \le i \le 3$ داریم : $f_i = \sum_{j=0}^{\infty} (x^i)^j$

و در هر افراز $(x^i)^j$ یعنی اینکه در این افراز j عامل i موجود است.

پس ضریب x^n در $f(x)$ عبارتست از $T(n)$ مثلاً : $T(4)=4, T(3)=3$ چرا که

$$f(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots$$

مثال. فرض کنید $P_d(n)$ تعداد افرازهای ممکن عدد r به عامل های نامساوی را نشان دهد.

تابع مولد $P_d(n)$ عبارت است از :

$$f(x) = (1+x)(1+x^2)\dots = \prod_{i=1}^{\infty}(1+x^i)$$

مثال. تعداد افرازهای عدد 6 به عامل های متمایز همان گونه که در مثال قبل به آن اشاره شد برابر است با 4، یعنی

$$P_d(4) = 6 = 1+5 = 2+4 = 3+3$$

حال همه ی افرازهای 6 را در زیر لیست می کنیم:

1+1+1+1+1+1 و 1+2+3

1+1+1+1+2 و 2+2+ 2

1+1+1+3 و 3+3

1+1+4 و 1+1+2+2

1+5 و 2+4 و 6

11 افراز مختلف داریم. زیرا افرازهایی که همه ی عامل های آن فردند خط کشیده ایم. تعداد آنها برابر با چهار است یعنی برابر است با $a(6)$ تعداد افرازهای n به عوامل فرد را با $P_o(n)$ نشان می دهیم پس $P_o(6)=4$. این مثال تنها بهانه ای است برای قضیه ی بعد.

قضیه (اویلر). اگر n عددی طبیعی باشد آنگاه $P_o(n)=P_d(n)$.

اثبات. تابع مولد $P_o(n)$ برابر است که عبارت است از :

$$f(x)=(1+x+x^2+x^3+\dots)(1+x^3+x^6+\dots)(1+x^5+x^{10}+\dots)\dots$$

$$=\frac{1}{1-x}\times\frac{1}{1-x^3}\times\frac{1}{1-x^5}\times\frac{1}{1-x^7}\times\dots=\frac{1}{1-x}\times\frac{1-x^2}{1-x^2}\times\frac{1}{1-x^3}\times\frac{1-x^4}{1-x^4}\times\frac{1}{1-x^5}\times\frac{1-x^6}{1-x^6}\times\dots$$

$$=\frac{1-x^2}{1-x}\times\frac{1-x^4}{1-x^2}\times\frac{1-x^6}{1-x^3}\times\frac{1-x^8}{1-x^4}\times\dots=(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^3\right)\left(1+x^4\right)\left(1+x^5\right)\dots$$

که عبارت آخر همان تابع مولد $P_d(n)$ است. پس $P_d(n)=P_o(n)$.

مثال. به افرازهای زیر از 6 را دقت کنید:

6=1+5=1+1+4=2+4=3+3=1+2+3=1+1+2+2

در هر یک از این 7 افراز هر عامل حداکثر دو بار تکرار شده است.

حال به افرازهای زیر توجه کنید:

1+5=2+4=1+1+4=1+1+2+2=2+2+2

=1+1+1+1+1+1=1+1+1+1+2

هیچ از این افرازها عامل مضرب 3 ندارد و تعداد آنها برابر هفت است.

مثال قبل ما را وسوسه کرد که قضیه اویلر را اثبات کنیم. این مثال نیز اینگونه است. قضیه ی بعدی را ببینید.

قضیه. تعداد افرازهای عدد n به طوری که در هر افراز هر عامل حداکثر 2 بار تکرار شود برابر است با تعداد افرازهای n به قسمی که هیچ یک از عوامل افراز ضریب 3 نباشد.

اثبات. تابع مولد تعداد افرازهایی n است که هیچ عاملی بیش از دوبار تکرار نمی شود:

$$f(x)=(1+x+x^{2})(1+x^{2}+x^{4})(1+x^{3}+x^{6})(1+x^{4}+x^{8})\ldots$$

$$=\frac{(1-x)(1+x+x^{2})}{(1-x)}\times\frac{(1-x^{2})}{(1-x^{2})}(1+x^{2}+x^{4})\times\frac{(1-x^{3})}{(1-x^{3})}(1+x^{3}+x^{6})\times\ldots$$

$$=\frac{(1-x^{3})}{(1-x)}\times\frac{(1-x^{6})}{(1-x^{2})}\times\frac{(1-x^{9})}{(1-x^{3})}\times\ldots$$

$$=\frac{1}{(1-x)}\times\frac{1}{(1-x^{2})}\times\frac{1}{(1-x^{4})}\times\frac{1}{(1-x^{5})}\times\frac{1}{(1-x^{7})}\times\ldots=\prod_{\substack{k\in\\ K\times 3}}\frac{1}{1-x^{k}}$$

که همان تابع مولد تعداد افرازهای n است به قسمی که عوامل افرازی ضرب 3 نباشند .

قضیه ی زیر که از آوردن اثبات آن خودداری می کنیم ممکن است برای شما جالب باشد:

قضیه. **تعداد افرازهای عدد طبیعی n به طوری که هر عامل آن حداقل دوبار تکرار شده باشد برابر است با تعداد افرازهای n به اعدادی که باقی مانده ی آنها بر 6، مساوی 1 یا 5 نباشد.**