نظریه دو جمله ای ها

مثال. ضریب عبارت x^3y^2 را در عبارت $(x+y)^5$ بیابید.

حل. در بسط عبارت

$$(x+y)^5=(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$$

باید از هر یک از 5 عامل x یا y را انتخاب کرد و به ازای هر حالتی که از 3 تا از آنها x و از 2 تـای دیگر y را انتخاب کنیم یک واحد به ضریب x^3y^2 اضافه می شود. حال ما یک تناظر یک بـه یـک بـین ضریب x^3y^2 در عبارت $(x+y)^5$ و تعداد کلمات 5 حرفی که با 3 تا x و 2 تا y ساخته می شـوند برقـرار می کنیم.

به ازای هر راه انتخاب x یا y از هر عامل یک کلمه ی 5 حرفی به این شکل می سازیم کـه اگـر از عامل i ام $(1\le i\le 5)$ x انتخاب شده باشد، حرف i ام این کلمه را x و در غیر این صورت y می گـذاریم. به عنوان مثال اگر ما از عامل های اول، دوم، سوم، چهارم و پـنجم، بـه ترتیـب x، y، y، x و x را انتخـاب کنیم معادل کلمه ی $xyyxx$ است. هم چنین کلمه ی $xxxyy$، متناظر با حالتی است که از عامل هـای اول، دوم، سوم، چهارم و پنجم به ترتیب x ، x ، x ، y ، y را انتخاب کنیم.

واضح است که این یک تناظر یک به یک بین ضریب x^3y^2 در عبارت $(x+y)^5$ و تعداد کلمات 5 حرفی که با 3 تا x و 2 تا y ساخته می شوند برقرار می کند. پس ضریب x^3y^2 در عبارت $(x+y)^5$ برابـر است با $10=\frac{5!}{3!2!}=\binom{5}{2}=\binom{5}{3}$.

مثال.

الف. ضریب x^2y^5 را در عبارت $(x+y)^7$ بیابید.

ب. ضریب x^3y^8 را در عبارت $(3x+4y)^{11}$ بیابید.

حل.

الف. طبق قضیه ی دو جمله ای نیوتن ضریب x^2y^5 در $(x+y)^7$ برابر است با $21=\binom{7}{5}$.

ب. فرض کنید $A=3x$ و $B=4y$. تنها جمله ای که شامل x^3y^8 می باشد، جمله ی A^3B^8 در عبارت $(A+B)^{11}$ است. بنابراین ابتدا ضریب A^3B^8 را به دست می آرویم. می دانیم ضریب A^3B^8 در عبارت $(A+B)^{11}$ برابر است با $\binom{11}{8}$. بنابراین ضریب x^3y^8 در عبارت $(3x+4y)^{11}$ برابر است با $\binom{11}{8}\times 3^3\times 4^8$.

دقت کنید که چون ضریب x و y به ترتیب برابر **3** و **8** بود، ضریب A^3B^8 ضرب در $3^3\times 4^8$ شد.

مثال. تساوی های زیر را ثابت کنید:

الف. $$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}..+\binom{n}{n}=2^n$$

ب. $$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$$

ج. $$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{2k}+\ldots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{2k+1}+\ldots=2^{n-1}$$

حل.

الف. روش اول. اگر در قضیه ی دو جمله ای نیوتن قرار دهید $x=y=1$، حکم ثابت می شد.

روش دوم. طرف چپ، تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه ی n عضوی است زیرا همان طور که می دانیم تعداد زیر مجموعه های k عضوی $(0 \le k \le n)$ مجموعه n عضوی برابر است با $\binom{n}{k}$. پس تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه ی n عضوی برابر است با $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$. از طرف دیگر همان طور که در بخش تناظر یک به یک دیدیم تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه ی n عضوی برابر است با تعداد دنباله های دودویی به طول n، یعنی برابر است با 2^n. پس حکم ثابت شد.

ب. اگر در قضیه ی دوجمله ای نیوتن قرار دهید $x = 1$ و $y = -1$، حکم ثابت می شود.

ج. روش اول. با استفاده از الف و ب، حکم قسمت ج اثبات می شود.

روش دوم. می دانیم $\left(\binom{n}{2k}+\dots+\binom{n}{2}+\binom{n}{0}\right)\left(\dots+\binom{n}{2k+1}+\dots+\binom{n}{3}+\binom{n}{1}\right)$ برابر با تعداد زیر مجموعه های زوج عضوی (فرد عضوی) یک مجموعه ی n عضوی است. حال با تناظر یک به یک برقرار کردن بین تعداد زی مجموعه های فرد عضوی و زوج عضوی یک مجموعه ی n عضوی تساوی

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{2k}+\dots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\dots+\binom{n}{2k+1}+\dots$$

را ثابت می کنیم.

فرض کنید E (O) مجموعه ی تمام زیر مجموعه های زوج عضوی (فرد عضوی) مجموعه ی $S = \{1, 2, \dots, n\}$ باشد. همچنین فرض کنید A (B) مجموعه ی تمام زیر مجموعه های S باشد که شامل عنصر n می باشد (نمی باشد). حال ثابت می کنیم یک تناظر یک به یک بین $B \cap E$ و $A \cap O$ و همچنین یک تناظر یک به یک بین $B \cap O$ و $A \cap E$ وجود دارد.

با اضافه کردن n به هر یک از اعضای $E \cap B$ $(O \cap B)$، به یک عضو از اعضای $O \cap A$ $(E \cap A)$ می رسیم و بالعکس با حذف n از هر یک از اعضای $O \cap A$ $(E \cap A)$، به یک عضو از اعضای $E \cap B$ $(O \cap B)$ می رسیم. به راحتی می توان ثابت کرد که رابطه ی فوق یک تناظر یک به یک است. در نتیجه:

$$|O \cap A| = |E \cap B|, |O \cap B| = |E \cap A| \quad \Rightarrow$$

$$|O \cap A| + |O \cap B| = |E \cap B| + |E \cap A| \quad \Rightarrow \quad |O| = |E|$$

از طرف دیگر می دانیم $|O| + |E| = |P(S)| = 2^n$، پس $|E| = |O| = 2^{n-1}$.

مثال. تساوی های ترکیبیاتی زیر را ثابت کنید:

الف. $$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \ldots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$$

ب. $$\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k}(n) = \binom{k}{k}\binom{n}{k} + \binom{k+1}{k}\binom{n}{k+1} + \ldots + \binom{n}{n}\binom{n}{n} = 2^{n-k}\binom{n}{k}$$

حل.

الف. روش اول. با در نظر گرفتن در قضیه ی دو جمله ای نیوتن داریم: $x = 1$

$$(1+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^k$$

حال با مشتق گیری از طرفین نسبت به y به دست می آید:

$$n(1+y)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}y^{k-1}$$

حال با قرار دادن $y = 1$ در تساوی فوق، خواهیم داشت:

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}=n2^{n-1}$$

روش دوم. می دانیم $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$. در نتیجه داریم:

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}=n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}=n\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l}=n2^{n-1}$$

ب. می دانیم $\binom{m}{k}\binom{n}{m}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$. در نتیجه داریم:

$$\sum_{m=k}^{n}\binom{m}{k}\binom{n}{m}=\sum_{m=k}^{n}\binom{m}{k}\binom{n-k}{m-k}=\binom{n}{k}\sum_{m=k}^{n}\binom{n-k}{m-k}=\binom{n}{k}2^{n-m}$$