

نظریه چند جمله ای ها

مثال. ضریب x^3yz^2 را در عبارت $(x+y+z)^6$ بیابید.

در قسمت قبلی، قضیه دو جمله ای نیوتن را ثابت کردیم. حال در این بخش سعی می کنیم این

قضیه را تعمیم دهیم تا بتوانیم ضرایب را در بسط حاصل ضرب $(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n$ به دست آوریم.

حل. در بسط عبارت

$$(x+y+z)^6 = (x+y+z)(x+y+z)(x+y+z)(x+y+z)(x+y+z)(x+y+z)$$

باید از هر یک از 6 عامل، x یا y یا z را انتخاب کرد و باید به ازای هر حالتی که در آن از 3 تای آنها

x یکی از آنها y و 2 تای از آنها z انتخاب می شود یک واحد به ضریب x^3yz^2 اضافه کنیم. حال ما یک

متناظر یک به یک بین ضریب x^3yz^2 در عبارت $(x+y+z)^6$ و تعداد کلمات 6 حرفی که با 3 تا x یکی y

و 2 تا z ساخته می شوند برقرار می کنیم.

به ازای هر راه انتخاب x یا y یا z از هر عامل یک کلمه ی 6 حرفی به این شکل می سازیم که اگر از

عامل i ام $(1 \leq i \leq 6)$ x انتخاب شده باشد، حرف i ام این کلمه را x و اگر y انتخاب شده باشد، y و اگر z

انتخاب شده باشد، z می گذاریم. به عنوان مثال اگر ما از عامل های اول، دوم، سوم، چهارم، پنجم و

ششم به ترتیب x ، y ، z ، x و z را انتخاب کنیم معادل کلمه ی $xyzxzx$ است. هم چنین کلمه ی $xyxzzx$

متناظر با حالتی است که از عامل های اول، دوم، سوم، چهارم، پنجم و ششم به ترتیب x ، x ، y ، x و z ،

را انتخاب کنیم.

واضح است که این یک تناظر یک به یک بین ضریب $x^3 y z^2$ در عبارت $(x+y+z)^6$ و تعداد

دنباله های به طول 6 با 3 عدد x ، 2 عدد z و یک عدد y می باشد که برابر است با

$$\binom{6}{3,1,2} = \frac{6!}{3!1!2!} = 60$$

مثال.

الف. ضریب $a^5 b^3 c^7 d^2 e^5$ را در عبارت $(a+b+c+d+e)^{22}$ بیابید.

ب. ضریب $\frac{x^3 y z^{\frac{5}{2}}}{w^6}$ را در عبارت $(2x-y+5\sqrt{z}+\frac{1}{7w^2})^{12}$ بیابید.

حل.

الف. طبق قضیه ی چند جمله ای ضریب $a^5 b^3 c^7 d^2 e^5$ در عبارت $(a+b+c+d+e)^{22}$ برابر

$$\binom{22}{5,3,7,2,5} = \frac{22!}{5!3!7!2!5!}$$

است با

ب. فرض کنید $A = 2x$ ، $B = -y$ ، $C = 5\sqrt{z}$ و $D = \frac{1}{7w^2}$. تنها جمله ای که در

عبارت $(A+B+C+D)^{12}$ شامل جمله ی $\frac{x^3 y z^{\frac{5}{2}}}{w^6}$ می باشد، جمله ی $A^3 B C^5 D^3$ می

باشد. چون طبق قضیه ی چند جمله ای ضریب $A^3 B C^5 D^3$ در

عبارت $(A+B+C+D)^{12}$ برابر $\binom{12}{3,1,5,3} = \frac{12!}{3!1!5!3!}$ است، پس ضریب $\frac{x^3 y z^{\frac{5}{2}}}{w^6}$ در

عبارت $(2x-y+5\sqrt{z}-\frac{1}{7w^2})^{12}$ برابر است با $-\frac{2^3 \times 5^5}{7^3} \binom{12}{3,1,5,3}$

مثال.

الف. بسط عبارت $(x + y)^6$ چند جمله دارد؟

ب. بسط عبارت $(a + b + c + d)^9$ چند جمله دارد؟

حل.

الف. هر جمله ی عبارت $(x + y)^6$ به صورت $x^k y^{6-k}$ است و چون $0 \leq k \leq 6$ ، پس این عبارت

7 جمله دارد.

ب. می دانیم هر جمله از بسط عبارت $(a + b + c + d)^9$ ، به صورت $a^{n_1} b^{n_2} c^{n_3} d^{n_4}$ می

باشد که در آن $(1 \leq i \leq 4)n_i \geq 0$ و $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 9$. بنابراین یک تناظر یک به

یک بین جملات بسط $(a + b + c + d)^9$ و جواب های صحیح نامنفی

معادله ی $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 9$ برقرار است. در نتیجه تعداد جملات این عبارت برابر

$$\text{است با } \binom{12}{3}.$$

