آشنایی با نظریه مجموعه ها

در این بخش با بحثی به نام نظریهٔ مجموعه ها آشنا می شوید. در اینجا سعی شده است بـا ارائـهٔ قضایا و مسایل جالب در نظریهٔ مجموعه ها، تکنیک هایی برای حل این نوع مسایل به دست آورید. ابتدا با چند تعریف ساده مبحث را شروع می کنیم.

تعریف. فرض کنید x یک مجموعه باشد، $P(x)$ را مجموعهٔ تمام زیرمجموعه هـای x تعریـف مـی کنیم.

تعریف. $F \subset P(x)$ را یک خانواده از زیرمجموعه های مجموعهٔ x می نامیم.

تعریف. تعداد اعضای یک مجموعه مانند x را با $|x|$ (کاردینال x) نمایش می دهیم.

مسألهٔ 1. خانواده ای از زیرمجموعه های مجموعهٔ x مانند F را خوب می نامیم با این شرط که اگـر $A, B \in F$ باشند آنگاه $A \cap B \neq f$. نشان دهید $|F| \leq 2^{n-1}$.

اثبات. اعضای $P(x)$ را به زوج های (A, A^C) افـراز مـی کنـیم (A^c مکمـل A اسـت) و چـون $|P(x)| = 2^n$ است پس تعداد این زوج ها برابر 2^{n-1} است. طبق اصـل لانـهٔ کبـوتری اگـر $|F| > 2^{n-1}$ باشد آنگاه دو عضو F از یک زوج انتخاب می شود و چون اشتراک هر دو عضو از این زوج ها تهی اسـت. پس F خانواده ای خوب نیست که با فرض اولیه تناقض دارد. بنابراین نتیجه می شود کـه $|F| \leq 2^{n-1}$، و برای حالت تساوی می توان یک عضو از x، مانند a را در نظر گرفت و تمام زیرمجموعه های x را که شامل a هستند ایجاب کرد که تعداد این زیرمجموعه ها 2^{n-1} است.

مسألهٔ 2. در مسأله بالا نشان دهید اگر $|F| < 2^{n-1}$ باشد، می توان یک عضو از $P(x)$ را که در F نیامده است به F اضافه کرد و F همچنان خوب باقی بماند.

اثبات. چون $|F| < 2^{n-1}$ است طبق اثبات مسألهٔ قبل نتیجه می شود که $A, A^c \in P(x)$ وجود دارند که $A^c \notin F$ یا $A \notin F$ حال از برهان خلف استفاده می کنیم. فرض کنید $A \cup F$ و $A^c \cup F$ هر دو خوب نباشند درنتیجه $B, C \in F$ وجود دارند که $C \cap A^c = f$ و $B \cap A = f$

$$\Rightarrow B \subset A^c, C \cap A^c = f \Rightarrow C \cap B = f$$

که خلاف فرض است. درنتیجه می توان به F آنقدر عضو اضافه کرد که $|F| = 2^{n-1}$ شود و F خوب باقی بماند.

در زیر با ارائه یک تعریف و حل مسألهای با آن، ایدهٔ بسیار خوبی از نظریهٔ مجموعه ها به دست خواهید آورد.

تعریف. ماتریس یک خانواده را به صورت زیر تعریف می کنیم:

فرض کنید $F = \{A_1, \ldots, A_k\}$، $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ و $A_i \subseteq X$ که $|x| = n$ باشد. یک ماتریس $n \times k$ را در نظر می گیریم که درایه سطر iام و ستون jام آن **1** است اگر و تنها اگر $x_i \in A_j$ باشد و در غیر این صورت صفر می باشد.

مسألهٔ 3. F یک خانوادهٔ m عضوی از زیرمجموعه های r عضوی $P(x)$ است و به ازای هر A_i, A_j متعلق به F، $|A_i \cap A_j| \le k$ است. نشان دهید

$$\left|\bigcup_{1}^{|F|} A_i\right| \ge \frac{r^2 m}{r + k(m-1)}$$

اثبات. فرض کنید $F=\{A_1,A_2,\ldots,A_m\}$، $X=\bigcup_{1}^{|F|}A_i$ و $|X|=n$ باشد. ماتریس این خانواده را در نظر می گیریم. در این ماتریس تعداد جفت درایه های واقع در سطر iام را که شامل 1 هستند a_i می گیریم. در واقع a_i تعداد (A_k,A_j)هایی است که $x_i\in A_i\cap A_j$. همچنین S را مجموع همه a_iها $(i=1,2,\ldots,n)$ در نظر می گیریم.

در ضمن می دانیم $|A_i\cap A_j|$ برابر است با تعداد یک های هم سطری که یک در ستون iام و دیگری در ستون jام قرار دارد. هر دو ستون از این ماتریس را که در نظر بگیریم حداکثر k تا از این جفت درایه های شامل یک دارند. زیرا $|A_i\cap A_j|\le k$ است، پس

$$S\le\binom{m}{2}k \qquad (1)$$

و اگر تعداد یک های واقع در سطر iام را b_i بگیریم تعداد جفت درایه های شامل یک، در سطر iام برابر $\binom{b_i}{2}$ خواهد بود و نتیجه می شود که

$$S=\binom{b_1}{2}+\binom{b_2}{2}+\cdots+\binom{b_n}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right)-\left(b_1+b_2+\cdots+b_n\right)\right] \qquad (2)$$

و چون $|A_i|=r$ است پس تعداد یک های کل جدول برابر mr است یعنی

$$b_1+b_2+\cdots+b_n=mr$$

طبق نامساوی کوشی شوارتز خواهیم داشت

$$b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2 \ge \frac{(b_1+b_2+\ldots+b_n)^2}{n}=\frac{m^2r^2}{n}$$

از (1) و (2) نیز نتیجه می شود:

$$\binom{m}{2}k \ge \frac{1}{2}\left[\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\right)-\left(b_1+\ldots+b_n\right)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m(m-1)k \ge \frac{1}{2}\left(\frac{m^2r^2}{n}-mr\right)$$

$$\Rightarrow (m-1)k \ge \frac{mr^2}{n}-r \Rightarrow r+(m-1)k \ge \frac{mr^2}{n}$$

$$\Rightarrow n \ge \frac{mr^2}{(m-1)k+r}$$

در حل مسألهٔ فوق از روشی به نام دوگانه شمردن استفاده شده است. در این روش همان طور که در حل مسأله دیدید تعداد یک سری اعضای خاص یک بار در ستون ها شمرده می شود و یک بار در سطرها و چون تعداد این اعضای خاص در هر دو حالت برابر با تعداد اعضای خاص کل جدول می باشد، درنتیجه یک تساوی یا نامساوی بین مفروضات مسأله به دست می آید.

مسألهٔ 4. **فرض کنید $H=\{E_1,\ldots,E_m\}$ یک خانواده از مجموعه n عضوی x باشد و به ازا هر $F\subset E_i$، $F\in H$ باشد نشان دهید که تابع $d:H\to H$ وجود دارد که به ازای هر $E\in H$، $E\cap d(E)$.**

اثبات. **فرض کنید $X=\{a_1,\ldots,a_n\}$. حال حکم را با استقرا روی n اثبات می کنیم. حکم برای $n=1$ بدیهی است زیرا تابع d با شرط $d(f)=a_1$ و $d(\{a_1\})=f$ در شرط مسأله صدق می کند.**

فرض کنید حکم برای $n=k$ برقرار باشد، حکـم را بـرای $n=k+1$ اثبـات مـی کنـیم. H را بـه دو زیرمجموعه H_1 و H_2 افراز می کنیم به طوری که:

$$\forall E_i \in H_1 \Rightarrow a_{k+1} \in E_i$$

$$\forall E_i \in H_2 \Rightarrow a_{k+1} \notin E_i$$

همچنین H_3 را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$H_3 = \{E_1 - \{a_{k+1}\} \mid E_i \in H_1\}$$

طبق فرض مسأله هر عضو H_3 به H متعلق است پس $H_3 \subset H_2$ است. با توجه به فرض استقرا، توابع $d_1 : H_2 \to H_2$ و $d_2 : H_3 \to H_3$ وجود دارند که در شرط مسأله صدق می کنند. حال d را به صورت زیر تعریف می کنیم:

اگر $A_i \in H_1 \Rightarrow d(A_i) = d_1(A_i - \{a_{k+1}\})$

اگر $A_i \in H_3 \Rightarrow d(A_i) = [d_2(A_i)] \cup \{a_{k+1}\}$

اگر $A_i \in H_2$

و $\qquad d(A_i) = d_1(A_i)$

$A_i \notin H_3$

به سادگی دیده می شود که تابع d جواب مسأله است.

مسألهٔ 5. فرض کنید X مجموعه ای دلخواه با حداقل 12 عضو و $A_1, A_2, \ldots, A_{1379}$ زیرمجموعه هایی 12 عضوی از A باشند (A_iها لزوماً متمایز نیستند) ثابت کنید دو زیرمجموعهٔ X_1 و X_2 وجود دارند به طوری که $X_1 \cap X_2 = \varnothing$ و $X_1 \cup X_2 = X$ و به ازای هر $1 \le i \le 1379$،

$A_i \subseteq X_2, A_i \subseteq X_1$

اثبات. برهان خلف، اگر چنین زیرمجموعه هایی وجود نداشته باشند، آنگاه برای هر افراز X به دو مجموعه X_1 و X_2، i و j وجود دارند به طوری که $A_i \subseteq X_j$. بدون کاسته شدن از کلیت مسأله می توان فرض کرد که X مجموعه ای متناهی است زیرا قرار می دهیم $X' = \bigcup_{i=1}^{1379} A_i$ و به جای X با X' کار می کنیم. فرض کنید $|X| = n$، در این صورت تعداد افرازهای X به دو مجموعهٔ X_1 و X_2 برابر است با 2^n.

حال تعداد حالاتی را می شماریم که X به دو مجموعهٔ X_1 و X_2 افراز شده است به طوری که به ازای یک اندیس i معلوم $A_i \subseteq X_1$ یا $A_i \subseteq X_2$.

اگر $A_i \subseteq X_1$، آنگاه برای X_1، 2^{n+2} حالت موجود است و با مشخص شدن X_1، X_2 نیز مشخص می شود. به همین ترتیب اگر $A_i \subseteq X_2$ آنگاه برای X_2، 2^{n-12} حالت موجود است و با مشخص شدن X_2، X_1 معلوم خواهد شد.

بنابراین تعداد حالات بالا حداکثر برابر با $1379 \times 2 \times 2^{n-12}$ است، ولی

$$1379 \times 2 \times 2^{n-12} = 1379 \times 2^{n-11} < 2^{11} \times 2^{n-11} = 2^n$$

پس لااقل یک حالت باقی می ماند که در شرایط مسأله صدق می کند.

قضیهٔ اسپرنر. خانوادهٔ $P = \{A_1, \ldots A_p\}$ شامل زیرمجموعه هایی غیرتهی از $x = \{1, 2, \ldots, n\}$ مفروض است. به طوری که برای هر i و j داریم $A_i \not\subseteq A_j$، آنگاه

$$|P| \le \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$$

اثبات. ابتدا نشان می دهیم تعداد خانواده های $\{B_0, B_1, \mathbf{K}, B_n\}$ با شرط

$$B_0 \underset{\neq}{\subset} B_1 \underset{\neq}{\subset} \mathbf{L} \underset{\neq}{\subset} B_n, B_i \subset X\,(0 \le i \le n)$$

برابر با $n!$ است.

با توجه به اینکه $|B_0| < |B_1| < \mathbf{L} < |B_n|$، نتیجه مـی شـود $|B_i| = i$ $(i = 0, \mathbf{K}, n)$ و B_0 ، 1 حالت دارد و B_1 ، n حالت داریم، B_2 ، n-1 حالت دارد و ... و B_n ، 1 حالت دارد پس تعداد این خانواده ها برابر $n!$ است. حال نشان می دهیم اگر B_m ثابت باشد تعداد این خانواده ها برابر با $m!(n-m)!$ اسـت، زیرا:

$B_{m+1} - B_m = \{x_1\} \rightarrow$ n-m **حالت**

$B_{m+2} - B_{m+1} = \{x_1\} \rightarrow$ n-m-1 **حالت**

$B_n - B_{n-1} = \{x_{n-m}\} \rightarrow$ **1** **حالت**

$$B_0 \underset{\neq}{\subset} B_1 \underset{\neq}{\subset} \mathbf{L} \underset{\neq}{\subset} B_m \underset{\neq}{\subset} B_{m+1i} \underset{\neq}{\subset} \mathbf{L} \underset{\neq}{\subset} B_n$$

و تعداد خانواده های $\{B_0, \mathbf{K}, B_{m+1}\}$ برابر با $m!$ و تعداد خانواده هـای $\{B_{m+1}, \mathbf{K}, B_n\}$ برابـر بـا $(n-m)!$ است، پس تعداد این خانواده ها برابر $m!(n-m)!$ است. حال به اثبات قضیه می پـردازیم. اگـر $|A_k| = k$ در این صورت تعداد خانواده های $\{A_0, \mathbf{K}, A_k, \mathbf{K}, A_n\}$ که شامل A_k اسـت برابـر $k!(n-k)!$ است P نیز از هر کدام از این خانواده ها حداکثر یک عضو دارد. پس

$$\sum_{A \in P} |A|!(n - |A|)! \le n!$$

زیرا تعداد خانواده هایی که $A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_m$ و در آن A_k ثابت باشد از تعداد خانواده هـایی که شرطی به جز $A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_m$ ندارند بیشتر نیست. پس با فرض $|A_i| = k_i$ داریم:

$$\sum_{i=1}^{|P|} k_i!(n-k_i)! \le n!$$

با توجه به اینکه

$$\binom{n}{k_i} = \frac{n!}{k_i!(n-k_i)!} \Rightarrow \sum_{i=1}^{|P|} \frac{n!}{\binom{n}{k_i}} \le n!$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{|P|} \frac{1}{\binom{n}{k_i}} \le 1 \qquad (1)$$

$$, \binom{n}{k_i} \le \binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \qquad (2)$$

از (1) و (2) $\Rightarrow \dfrac{|P|}{\binom{n}{\frac{n}{2}}} \le \displaystyle\sum_{i=1}^{|P|} \frac{1}{\binom{n}{k_i}} \le 1$

$$\Rightarrow |P| \le \binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$$

و اگر تساوی برقرار باشد در این صورت هر عضو P $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ یا $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ عضوی است و P از هر خـانواده دقیقاً یک عضو دارد.

قضیه (Edros-ko-rado). اگر $\{A_1,\ldots,A_m\}$ خانواده ای از زیرمجموعه های k عـضوی $(k \le \frac{n}{2})$ مجموعهٔ $\{1,2,\ldots,n\}$ باشد به طوری که برای هر $i \ne j$، $A_i \cap A_j \ne \emptyset$، در این صورت $m \le \binom{n-1}{k-1}$.

اثبات. فرض کنید

$$F_i = \{i, i+1, \ldots, i+k-1\} \qquad 1 \le i \le n$$

اعضای مجموعه را به پیمانهٔ n در نظر بگیرید، همچنین فـرض کنیـد $F = \{F_1,\ldots,F_n\}$، در ایـن صورت $|A \cap F| \le k$ زیرا در غیر این صورت دو عضو از A مثلاً A_i و A_j یافت می شوند به طوری که $A_i \cap A_j = \emptyset$.

برای هر جایگشت p از $\{1,2,\ldots,n\}$ مجموعه های F_i^p و F^p را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$F^p = \{F_1^p, F_2^p, \ldots, F_n^p\}, F_i^p = \{p(x) \mid x \in F_i\}$$

با استدلال مشابه حالت قبل می توان نشان داد $|A \cap F^p| \le k$، پـس $\sum_p |A \cap F^p| \le n!k$ و

چون داریم:

$\sum_p |A \cap F^p| = mnk!(n+k)!$ (چرا؟) درنتیجه خواهیم داشت:

$$mnk!(n+k)! \le n!k \Rightarrow n(k-1)!(n-k)! \le (n-1)!$$

$$\Rightarrow m \le \binom{n-1}{k-1}$$

تعریف. فرض کنید $\{A_0 \ldots A_{n-1}\}$ خانواده ای از زیرمجموعه های مجموعهٔ S باشد، منظور از SDR برای این خانواده یعنی n عضو دو به دو متمایز $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ از S، به طوری که $a_i \in A_i$.

قضیه فیلیپ هال. خانواده $\{A_0, A_1, \mathbf{K}, A_{n-1}\}$، SDR دارد اگر و تنها اگر اجتماع هر k عضو این خانواده حداقل k عضو داشته باشد.

(اثبات قضیهٔ فوق را در این مقاله نمی آوریم.)

تعریف. ماتریس مربعی A را جایگشتی گوییم، هرگاه در هر سطر و هر ستون A فقط یک درایه **1** و بقیهٔ درایه ها صفر باشند.

قضیه. فرض کنید A ماتریسی با درایه های متعلق به اعداد صحیح نامنفی باشد، اگر مجموع درایه های هر سطر و هر ستون برابر k باشد در این صورت A را می توان به صورت مجموع k ماتریس جایگشتی نوشت.

اثبات. تعریف کنید $A_i = \{j \mid a_{ij} > 0\}$، t سطر را در نظر بگیرید. مجموع درایه های آنها tk است، پس حداقل در t ستون درایه های ناصفر وجود دارند، زیرا مجموع درایه های هر ستون نیز k است. بنابراین $\{A_1, \mathbf{K}, A_n\}$ در شرط قضیهٔ فیلیپ هال صدق می کند، پس n تا درایه وجود دارد که هیچ دوتایی در یک سطر یا یک ستون نبوده و هر کدام از صفر بیشتر هستند، بنابراین می توان از این درایه ها یک واحد کم کرد و یک ماتریس جایگشتی تولید کرد و با استقراء روی این ماتریس جدید حکم اثبات می شود. (جزئیات اثبات به عهدهٔ خواننده گذاشته می شود).

قضیه *konig*. فرض کنید A ماتریسی باشد که درایه های آن **0** یا **1** هستند، در این صورت اگر کمترین تعداد سطرها یا ستون هایی که همهٔ **1**ها را شامل شوند m بنامیم و بیشترین تعداد **1**هایی که هیچ دوتایی هم سطر و یا هم ستون نیستند را M بنامیم آنگاه $m=M$.

اثبات. واضح است که $m \geq M$. فرض کنید $m = r + s$ و r سطر و s ستون شامل همهٔ **1**ها باشد. بدون ازدست دادن کلیت فرض کنید این سطرها و ستون ها، r سطر و s ستون اول ماتریس باشند. به ازای $1 \leq i \leq r$ تعریف کنید: $A_i = \{j \mid a_{ij} = 1, j > s\}$.

خانواده $\{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$ در شرط هال صدق می کند زیرا اگر k سطر باشند که حداکثر با k-1 ستون اشتراک داشته باشند می توان به جای k سطر، k-1 ستون را انتخاب کرد که با مینیمم بودن M در تناقض است. پس خانوادهٔ فوق SDR دارد، یعنی در بلوک سمت راست بالا، r تا **1** دو به دو غیر هم خط وجود دارد به طور مشابه در بلوک سمت چپ پایین، s تا **1** دو به دو غیر هم خط وجود دارد، پس حداقل r+s=m تا **1** دو به دو غیر هم خط وجود دارد، بنابراین $M \geq m$، لذا M=m.

حداقل r+s=m تا **1** دو به دو غیر هم خط وجود دارد، بنابراین $M \geq m$، لذا $M = m$.

قضیه. فرض کنید

$$U, V \subseteq P(X), |X| = n$$

با این شرط که

$$\begin{cases} a \in U, b \subseteq a \Rightarrow b \in U & (1) \\ a \in V, b \subseteq a \Rightarrow b \in V & (2) \end{cases}$$

آنگاه $|U| \cdot |V| \leq 2^n |U \cap V|$، و اگر در شرط (**2**)، به جای $b \subseteq a$، $a \subseteq b$ را قرار دهیم داریم:

$$|U| \cdot |V| \geq 2^n |U \cap V|$$

مسألهٔ 6. $F \subseteq P(X)$ مفروض است. اگر $|X| = n$ و بـه ازای هـر $A, B \in F$، $A \cap B \neq f$ و $A \cup B \neq X$ در این صورت نشان دهید $|F| \leq 2^{n-2}$.

اثبات. مجموعهٔ U و V را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$U = \{x \mid x \subseteq y, y \in F\}$$

$$V = \{x \mid y \subseteq x, y \in F\}$$

در این صورت اگر $a \in V$ و a'، آنگاه $a \cap a' \neq f$ و اگر $a, a' \in U$، آنگاه $a \cup a' \neq X$ و نیز اگر

$$\begin{cases} a \in U, b \subseteq a \Rightarrow b \in U & (1) \\ a \in V, a \subseteq b \Rightarrow b \in V & (2) \end{cases}$$

طبق قضیهٔ گفته شده داریم:

$$|U| \cdot |V| \geq 2^n |U \cap V|$$

و چون اشتراک هر دو عضوی از V ناتهی و اجتماع هر دو عضوی از U، مخالف X است داریم:

$$|U| \leq 2^{n-1}$$

$$|V| \leq 2^{n-1}$$

و با توجه به اینکه $|F| \leq |U \cap V|$ خواهیم داشت:

$$2^n |F| \leq 2^n |U \cap V| \leq |U| \cdot |V| \leq 2^{n-1} \times 2^{n-1} = 2^{n-2}$$

$$\Rightarrow |F| \leq 2^{n-2}$$