

مسیرها و دورها:

چه بسا مسیر پرپیچ و خم با پرتگاههای عمیق که در سر راه زندگی طی می گردند.

اکنون به مفهوم بسیار ملموسی درگراف خواهیم پرداخت و آن عبارت خواهد بود از مفهوم " رفتن از

یک راس به راس دیگر" به عبارتی حرکت کردن روی یالها.

راسها و یالها همانطور که انتظار می رود نشان دهنده ایستگاهها و ارتباط هایی میان آنهاست که در

این میان این موضوع که آیا راهی میان دو راس مفروض وجود دارد یا نه می تواند پر ارزش و با معنا باشد.

اما تعریف ها:

یک گشت در گراف G را این گونه تعریف می کنیم:

دنباله ای از رئوس به صورت

$$v_0 v_1 v_2 \dots v_m$$

که به ازای هر $0 \leq i \leq m-1$ داشته باشیم $v_i v_{i+1} \in E$

این تعریف برای تمام گراف ها اعم از ساده و چندگانه و جهت دار برقرار است.

بدیهی است که $v_i v_{i+1}$ و $v_{i+1} v_{i+1}$ یالهای منتهی به راس v_i می باشند که در دنباله داده شده می

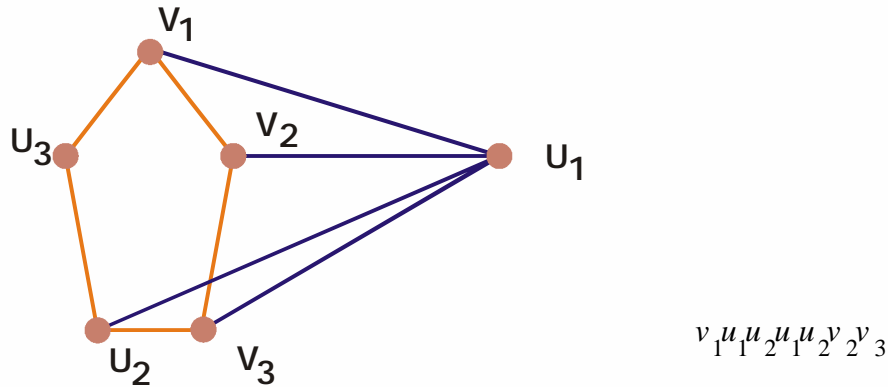
توانند پشت سر هم بیایند. (دو یال متوالی در دنباله یک گشت یا مجاور یا یکسان می باشند)

دقت کنید در یک گشت به صورت

$$v_0 v_1 v_2 \dots v_m$$

که آن را گشتی ما بین v_m, v_0 تعریف می کنیم، هم رئوس می توانند تکراری باشند هم یالها.

مثال. در گراف زیر دنباله



یک گشت ما بین v_3, v_1 می باشد که رئوس u_1, u_2 در آن تکرار شده اند و یال $u_1 u_2$ هم 4 بار پیموده شده است.

• دقت کنید هر دنباله دلخواهی از رئوس نمی تواند یک گشت باشد زیرا باید هر دو راس متوالی در دنباله نشان گر یک یال باشند.

تعریف. طول یک گشت شامل m راس به صورت $v_0 v_1 v_2 \dots v_m$ برابر با $(m-1)$ می گیرند و بیانگر تعداد یالهایی است که این گشت می پیماید.

تعریف. گشت بسته. اگر در یک گشت رئوس ابتدا و انتهای آن یکسان می باشند یعنی به صورت

$$v_1, v_2, \dots, v_{m-1}, v_m = v_1$$

باشد آن را یک گشت بسته می نامیم و بیانگر حرکتی روی یالها می باشد که در انتها به راس آغازین بازگشته ایم.

تعریف. گذر. اگر در تعریف گشت این شرط را هم اضافه کنیم که یال تکراری نداشته باشیم آن را

گذر می نامیم.

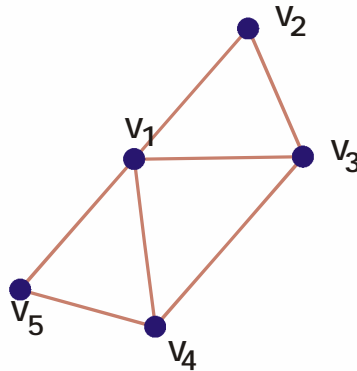
به عبارتی دیگر گذرگشتی است که یال تکراری ندارد.

طول گذر و رئوس ابتدایی و پایانی گذر نیز مانند گشت می باشد.

تعریف. گذر بسته. مانند گشت بسته، به گذری بسته می گویند که رئوس ابتدایی و انتهایی آن یکسان

باشند.

مثلاً در شکل زیر $v_1v_2v_3$ یک گذر و $v_1v_2v_3v_4v_5v_1$ یک گذر بسته می باشد.



تعریف. مسیر. اگر علاوه بر یالها، رئوس یک گشت هم غیر تکراری باشند آن را مسیر می نامند.

به عبارت دیگر مسیر گذری با رئوس تکراری می باشد.

تعریف. دور. در مسیر $v_1, v_2, \dots, v_m, v_{m+1}$ اگر $v_1 = v_{m+1}$ باشد آن را یک دور می نامیم. (درست

است که قرار شد در مسیر راس تکراری نداشته باشیم ولیکن تنها استثنای این قاعده تعریف دور می باشد،

دقت کنید در یک دور ما در حقیقت راس تکراری نداریم! و هر راس آن دقیقاً یکبار در دور ظاهر می شود ولیکن برای آن در هنگام نوشتن دور به صورت خطی بتوانیم دور بودن آن را مشخص کنیم یعنی نشان بدهیم که بعد از راس آخر هم دوباره به راس اول بازگشته ایم مجبوریم راس اول را دوبار در دنباله ظاهر کنیم).

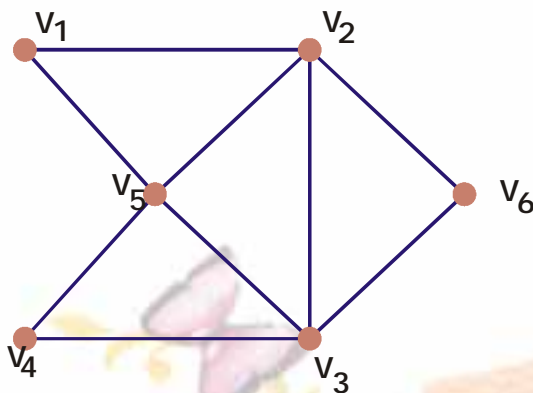
دقت کنید، از آنجا که گشت و گذر مفاهیم بسیار کلی می باشند، ما غالباً با مسیرها و دورها که حالت بسته آنها می باشند سر و کار خواهیم داشت.

یک دور با 3 راس را مثلث می نامند، به نظر شما چرا؟!

تعریف. طول دور. طول یک دور با m راس به صورت $v_1 v_2 \dots v_m v_1$ را برابر با m می گیرند و بیانگر تعداد یالهای آن می باشد.

مثال.

در شکل روبه رو به مسیر، دور و گشت و گذرهای زیر توجه کنید.



یک مسیر از v_1 به v_2 : $v_1 v_5 v_3 v_2$

یک گشت از v_1 به v_2 : $v_1 v_5 v_1 v_2$

یک گذر از v_1 به v_2 : $v_1 v_5 v_3 v_4 v_5 v_2$

و یک دور: $v_1 v_2 v_5 v_1$

- ثابت کنید هر مسیر یک گذر و هر گذر یک گشت می باشد. (به عنوان تمرین)
- ثابت کنید هر دور یک گذر بسته و هر گذر بسته یک گشت بسته می باشد (به عنوان

تمرین)

- ثابت کنید اگر گشت (u, v) موجود باشد آنگاه مسیر (u, v) هم وجود خواهد داشت.

اثبات. در گشت (u, v) ما به ازای هر بار تکرار w به صورت

$$uu_1 \dots u_i w u_{i+1} \dots u_j w u_{j+1} \dots v$$

گشت بسته

یک گشت بسته خواهیم داشت که با حذف آن قسمت خلی به ارتباط v, u نخواهد خورد

$$\rightarrow uu_1 \dots u_i w u_{j+1} \dots v$$

و با ادامه این کار سرانجام به جایی خواهیم رسید که هیچ تکراری نخواهیم داشت.

در تمرین بعد هم ثابت می کنیم در هر گشتی که راس تکراری نداشته باشیم، یال تکراری هم

نخواهیم داشت پس آنچه می ماند یک مسیر (u, v) است.

- ثابت کنید هر گشت با رؤس غیر تکراری یک مسیر است.

تنها چیزی که نیاز داریم این است که ثابت کنیم یال تکراری هم ندارد.

$$w_0 w_1 \dots w_m$$

برهان خلف. اگر یال uv در دنباله گشت

تکرار شده باشد بدیهی است لااقل یکی از رؤس هم تکراری در این دنباله ظاهر خواهد شد و این

بفرض سوال تناقض دارد.

به ادامه مباحث مسیریها و دورها در مبحث همبندی خواهیم پرداخت.