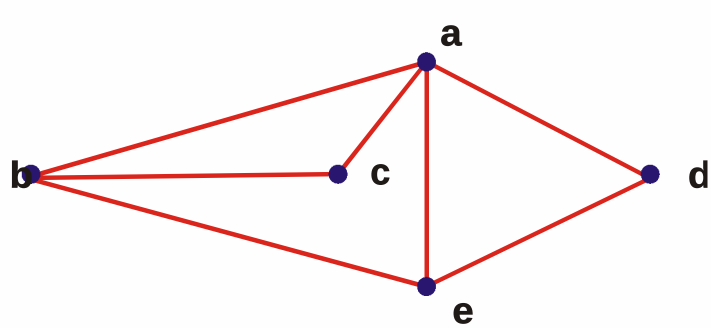
گراف های بازه ای:

در بخش قبل با گرافهای اشتراکی آشنا شدید. حال به جای مجموعه ی S در آنجا اعداد حقیقی R و به جای C، تعدادی از بازه های اعداد حقیقی را قرار می دهیم. به این نوع گراف، گراف بازه ای می گوییم

(یاد آوری: بازه ی $[a,b]$، زیر مجموعه ای از است که:

$$x \in [a,b] \Leftrightarrow a \le x \le b$$

بر خلاف گرافهای اشتراکی که برای هر گراف، یک گراف اشتراکی وجود داشت، این امر برای گراف های بازه ای صادق نیست. یعنی گرافی می توان یافت که نتوان آن را به صورت یک گراف بازه ای تعریف کرد. پیدا کردن این گراف به صورت تمرین به عهده ی خواننده است. گراف I که در زیر آمده مثالی از یک گراف بازه‌ای است:



زیرا می توان فرض کرد که

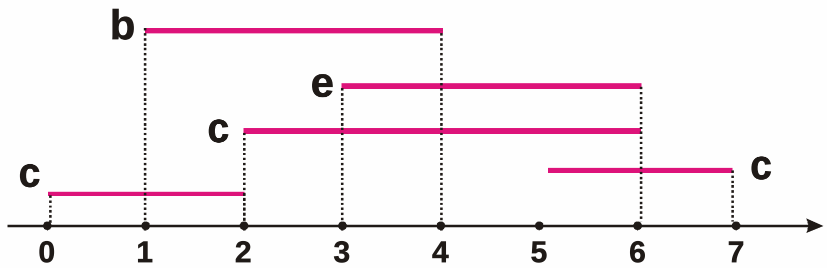
$a = [1,6]$

$b = [1,4]$

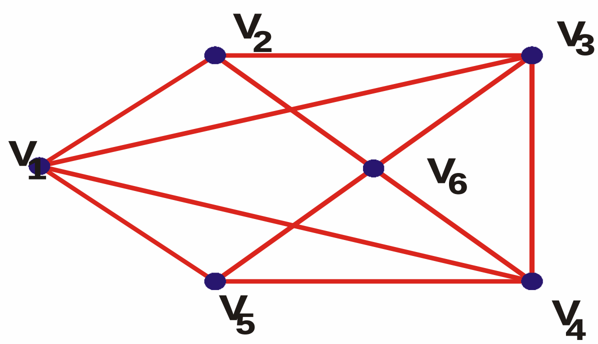
$c = [0,2]$

$d = [5,7]$

$e = [3,6]$



مثال. آیا گراف زیر می‌تواند یک گراف بازه ای باشد؟



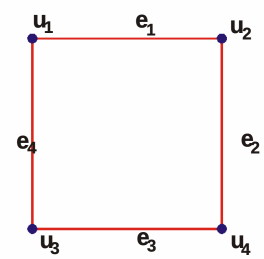
حل. برای جواب دادن به این سوال حالت کلی تر زیر را اثبات می کنیم.

هر گراف که یک گراف القایی 4 راسی دوری داشته باشد نمی تواند بازه ای باشد.

یعنی به بیان ساده تر در هر گراف اگر بتوان یک مربع (چهار راسی که با چهار یال متوالیاً به هم وصل شده اند) یافت به قسمی که بین چهار راس آن بجز چهار یال مربع یال دیگری نباشد آن گراف الزاماً نمی تواند بازه ای باشد.

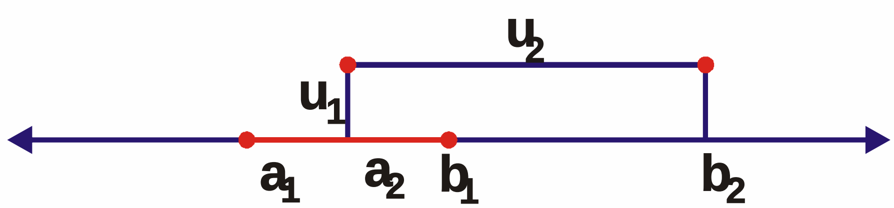
اثبات. چهار راس u_4,u_3,u_2,u_1 را در نظر بگیرید که با یالهای e_4,e_3,e_2,e_1 به شکل زیر به هم متصل

شده اند.



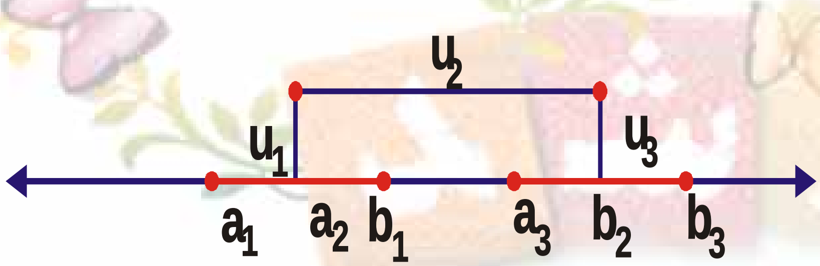
به برهان خلف اگر این گراف بازه‌ای باشد داریم:

بازه u_1 با u_2 اشتراک دارد پس شکلی مانند زیر دارند



به طریق مشابه u_3 هم با u_2 اشتراک دارد (به خاطر وجود یال $e_2 = u_2u_3$) و از طرفی چون با u_1 یالی ندارد پس u_3 با u_1 اشتراکی ندارد.

پس تنها حالتی که بتوان برای u_3 بازه ای فرض کرد که با بازه u_2 اشتراک داشته و با u_1 نداشته باشد به صورت زیر است



حال نوبت پیدا کردن بازه u_4 است. دقت کنید u_4 هم به u_1 هم به u_3 یال دارد ولی به u_2 یالی نـدارد پس باید بتوان در شکل بالا بازه ای برای آن یافت که هم با بازه u_3 اشتراک داشـــته باشـد و هــم بـا بــازه u_1 اشتراک داشته باشد و از طرفی از محدوده بازه هم نگذرد! که واضح است چنین چیزی ممکن نیست.

لذا فرض باطل و ثابت می گردد که چهار راس $u_4u_3u_2u_1$ نمی توانند بازه‌های مناسب اختیار کنند.