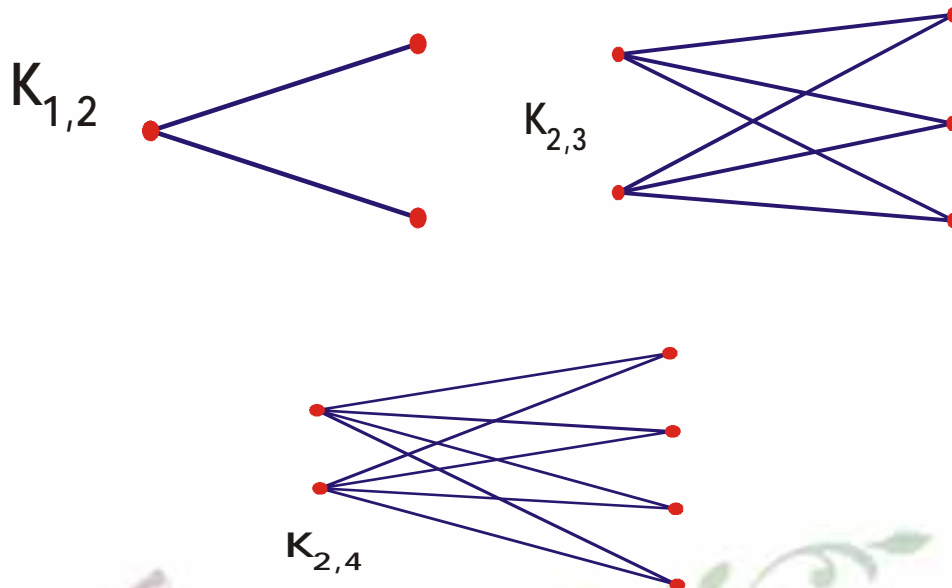


گراف دو بخشی

اگر راس های گراف G به دو مجموعه N, M افراز گردند. به طوری که هنگام رسم گراف G ، هیچ یالی بین راس های مجموعه M رسم نگردد و هیچ یالی بین راس های مجموعه N نیز ترسیم نشود، گراف G را یک گراف دو بخشی نامیم.

اگر M دارای m عضو و N دارای n عضو باشد، آنگاه گرافی که هر راس درون M را به همه ی راس های N وصل کرده باشد را گراف دو بخشی کامل نامیده و با $K_{m,n}$ نشان می دهیم.

مثال.



به راحتی می توان دریافت که تعداد یالهای یک گراف دو بخشی کامل $K_{m,n}$ برابر است با

$$m \times n$$

قضیه. گراف G دو بخشی است اگر و تنها اگر G دارای هیچ دوری به طول فرد نباشد.

اثبات. اگر G دو بخشی باشد آنگاه اثبات این که هر دور در G به طول زوج است، ساده بوده و به

عنوان تمرین به خواننده محول می کنیم.

و اما فرض می کنیم گراف فاقد دور فرد است و می خواهیم اثبات کنیم که G دو بخشی است. بدون

ایجاد خلل در کلیت مساله، فرض می کنیم که G همبند باشد. چرا که اگر G ناهمبند باشد، مولفه های

همبندی G نیز دور فرد ندارند و طبق اثباتی که ارایه خواهیم داد مولفه های همبندی نیز دو بخشی خواهند

شد و در نتیجه گراف G دو بخشی خواهد بود. فرض کنیم G دارای n راس باشد از قرار :

$$V_1, V_2, \dots, V_n$$

چون G همبند است، از V_1 به تمام راس ها حداقل یک مسیر وجود دارد. اگر طول این مسیر زوج بود.

آن را در مجموعه A قرار می دهیم و اگر طول آن فرد بود آن را در مجموعه B قرار می دهیم. خود V_1

را نیز در مجموعه A قرار می دهیم. اولاً ثابت می کنیم چون G دور فرد ندارد، زوجیت طول مسیرهایی که

از V_1 به V_i می روند یکسان است، یعنی اگر از V_1 به V_i دو مسیر باشد، یا هر دو با طول فردند یا با طول زوج.

پس از این نتیجه خواهد شد که $A \cap B = \bar{A}$. در ضمن ثابت خواهیم کرد که هیچ دو راس مجموعه A

به هم متصل نیستند و در ضمن هیچ دو راس مجموعه B نیز به هم متصل نیستند که حکم مساله

خواهد بود.

اگر از V_1 به خودش یک مسیر فرد وجود داشته باشد، یعنی یک دور فرد داریم که ممکن نیست. پس

از V_1 به V_i تنها مسیرهای زوج وجود دارد (مسیر به طول صفر هم داریم). اگر از V_1 به یکی از راس های

دیگر مثلاً V_i یک مسیر با طول زوج و یک مسیر با طول فرد وجود داشته باشد، در آن صورت ثابت می کنیم

که یک دور به طول فرد در G وجود دارد.

$T = V_1 t_1 t_2 \dots t_l V_l$ ، فرد l

$J = V_1 j_1 j_2 \dots j_k V_l$ ، زوج k

فرض می کنیم $t_1 \neq j_1, t_l \neq j_k$. در T از t_1 شروع کرده و اولین جایی را بیابید که J, T نقاط

مشترک دارند. آن را h بنامید. از V_1 شروع کنید و در J تا h پیش روید و سپس از مسیر T به ترتیب بر

عکس از h به V_1 برگردید. این یک دور است. پس طول زوج دارد. پس در نتیجه از V_1 تا h در هر دو

مسیر J, T یا هر دو زوج و یا هر دو فرداند. حال الگوریتم فوق را برای مسیرهای از h تا V_i ، که قسمتهایی

از J, T هستند، تکرار می کنیم. نهایتاً به دو مسیر J', T' از h' به V_i دست پیدا می کنیم که اشتراک

ندارند و طولشان از نظر زوجیت فرق می کند. یعنی اگر طول T' فرد باشد آنگاه طول J' زوج خواهد بود و

بالعکس.

از چسباندن J', T' به هم دوری به طول فرد به وجود می آید که تناقض آشکار است. پس B, A

افرازی از راس های گراف اند که اگر دو نقطه از A مانند A_j, A_i به هم وصل باشند آنگاه دو مسیر J, T وجود

دارند.

از V_1 به ترتیب به نقاط A_j, A_i که هر دو J, T از طول زوج اند. مسیر $V_1 \dots A_j \dots A_i \dots V_1$ دوری به

طول فرد است که تناقض می باشد. همین طور می توان برای B استدلال آورد. پس گراف دو بخشی است.

پس از اثبات قضیه مهم و پرکاربرد بالا به سراغ مطالب ساده تر و بدیهی تر گراف های دو بخشی

می رویم:

مثال. اگر گراف دو بخشی m و n راسی یک منتظم باشد به ازای چه n, m هایی چنین گرافی وجود

دارد؟

حل. به سادگی از آنجا که به ازای هر راسی از یک بخش و دقیقاً یک راس از بخش دیگر دقیقاً یک یال

داریم، پس تعداد رؤوس بخش‌ها یعنی تعداد یالها $m = n$

مثال. شرط لازم و کافی برای وجود گراف دو بخشی n, m راسی K منتظم را بیابید.

$$(K < n - 1, K < m - 1).$$

حل. این بار نیز ثابت می‌کنیم باید n, m برابر باشند.

اثبات. فرض کنیم گراف دو بخشی G که یک بخش آن m راس و بخش دیگر آن n راس دارد، منتظم

و از درجه K است.

پس تعداد یالهای آن را می‌توان به دو گونه شمرد:

1. تعداد سرهای منتهی یالها به بخش اول $m.K$ تاست.

2. تعداد سرهای منتهی یالها به بخش دوم $n.K$ تاست.

و هر دو بیانگر تعداد یالها می‌باشند.

$$mK = nK \quad \text{پس داریم:}$$

$$m = n \quad \text{لذا}$$

برعکس. باید ثابت کنیم اگر $m = n$ ، $(K < (m - 1 = n - 1))$ باشد آنگاه گراف k منتظم مربوط

وجود دارد. که اثبات آن به عنوان تمرین به خواننده محترم واگذار می‌شود.

شبکه رشد - شبکه ملی مدارس ایران



Olympiad.roshd.ir