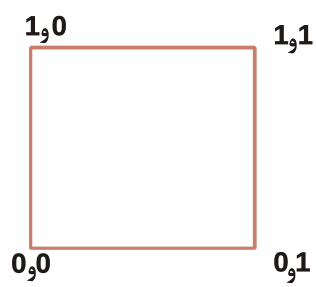
گرافهای k–مکعب:

گراف k–مکعب گرافی است که رئوس آن دنباله های غیر تکراری k تایی از **0** و **1** به صورت $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ باشد. و یالهای آن، میان رئوس رسم شوند که دقیقاً در یک جایگاه متفاوت باشند.

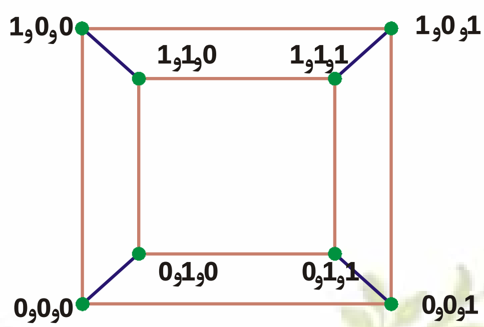
این گراف ها را که با Q_k نمایش می دهند خصوصیت های جالبی دارند که پس از چند مثال به خواص آنها می پردازیم.

Q_1 :

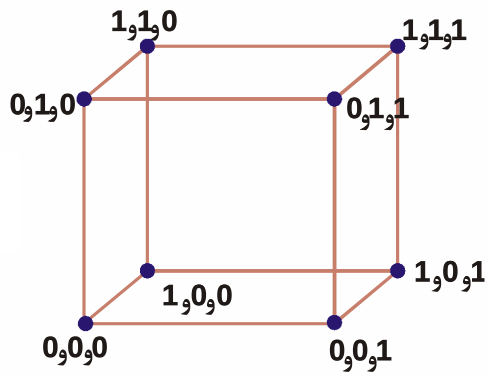
Q_2 :



Q_3 :



دقت کنید گراف مکعب همان Q_3 می باشد که گاهی به صورت زیر نیز رسم می گردد.



نمایش دیگر Q_3

دقت کنید Q_1, Q_2, Q_3 به ترتیب بیانگر فضاهای یک بعدی (خط)، دو بعدی (صفحه) و سه بعدی (فضا) بوده اند.

قضیه. ثابت کنید گراف $k-$مکعب همبند است.

کافی است به ازای هر دو راس u, v با دنباله های زیر، مسیری میان آن دو بیابیم.

$$u = \left(a_1, a_2, ..., a_k\right)$$

$$v = \left(b_1, b_2, ..., b_k\right)$$

به طور خلاصه اگر اثبات را بیان کنیم داریم:

اگر u با v در m جایگاه تفاوت داشته باشد، از u نخست به راسی می رویم که با u در جایگاه اول از آن m جایگاه متفاوت باشد. سپس از آن به راسی می رویم که علاوه بر جایگاه اول در جایگاه دوم از آن m جایگاه با u متفاوت باشد و به همین ترتیب ادامه می دهیم تا به v برسیم.

واضح است جنین مسیری وجود خواهد داشت.

تمرین. تعداد یالهای گراف $k-$مکعب را بدست آورید.

حل. برای این منظور نخست تعداد راسها را بدست می آوریم:

چون رئوس دنباله های متفاوت k تایی از **0** و **1** می باشند پس بنابر اصل ضرب تعداد آنها 2^k تا می‌باشد. سپس درجه هر راس را بدست می آوریم:

از آنجا که به هر راس یک دنباله k تایی از **0** و **1** متناظر شده و هر راس تنها به رئوسی متصل می گردد که دقیقاً در یک جایگاه با آن تفاوت دارند پس همسایه های هر راس عبارتند از :

راسی که فقط درجایگاه اول با آن تفاوت دارد

و راسی که فقط در جایگاه دوم با آن تفاوت دارد

و ...

تا راسی که فقط در جایگاه kام با آن تفاوت دارد.

و این یعنی درجه هر راس k می باشد

پس

$$\text{تعداد یالها} = \frac{k \times 2^k}{2} = k\,2^{k-1}$$

نتیجه. به راحتی دیده شد گراف $k-$مکعب، k منتظم می باشد.

قضیه. ثابت کنید Q_k گرافی دو بخشی می باشد.

برای این منظور بایستی رئوس آن را به دو بخش B, A به گونه ای افراز کرد که یالی ما بین رئوس داخل یک بخش موجود نباشد:

بدین منظور:

رئوسی که دنباله آن تعداد زوجی عدد **1** دارند $= A$

رئوسی که دنباله آن تعداد فردی عدد **1** دارند $= B$

حال یالی میان رئوس A وجود نخواهد داشت زیرا اگر وجود داشته باشد. و آن یال uv باشد که

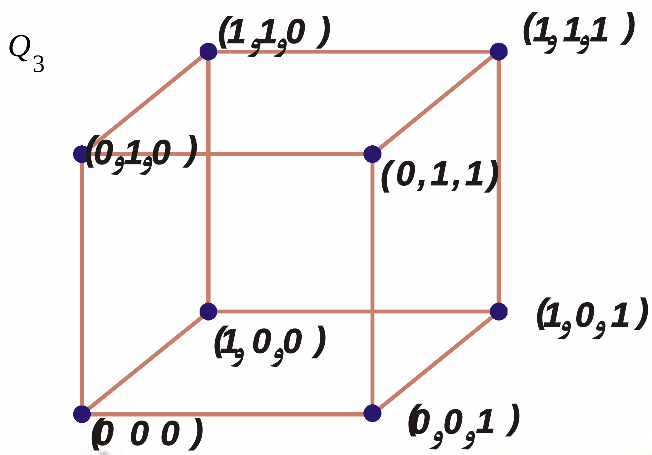
$u,v\in A$ پس خواهیم داشت:

زیرا v,u دقیقاً در یک جایگاه تفاوت دارند $\pm 1 \rightarrow$ تعداد **1** های $u =$ تعداد **1** های v

پس v,u نمی توانند از لحاظ زوجیت و فردیت مانند هم باشند.

پس یالی که رئوس A را به هم یا رئوس B را به هم وصل کند وجود نداشته و گراف دو بخشی خواهد بود.

مثال.



در Q_3، رئوس آبی متعلق به یک بخش و رئوس سیاه

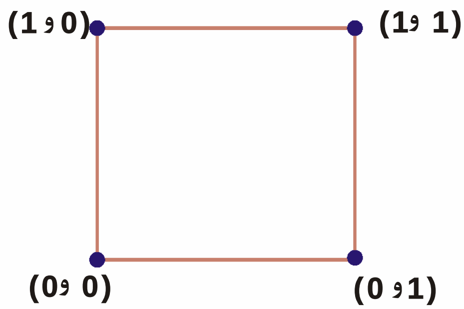
متعلق به بخش دیگر گراف دو بخشی خواهند بود

و اما آخرین و جذابترین خصوصیت گرافهای $k-$مکعب همیلتونی بودن آنهاست. در این رابطه به قضیه زیر می پردازیم:

قضیه. ثابت کنید که گراف $k-$مکعب هامیلتونی است. $(k \geq 2)$

اثبات به استقرا.

برای $k=2$ که بدیهی است



فرض می کنیم برای $k=m-1$, $(m-1)-$مکعب هامیلتونی باشد یعنی دنباله ای از رئوس به صورت

$$u_1u_2u_3 \ldots u_{2^{m-1}}u_1$$

وجود دارد که هر کدام به بعدی یال داشته و $u_{2^{m-1}}$ هم به u_1 یال داشته باشد.

می خواهیم برای $k=m$، ثابت کنیم دنباله رئوسی به صورت

$$v_1v_2 \ldots v_{2^m}v_1$$

وجود دارد که $v_i = a_{i_1}a_{i_2} \ldots a_{i_m}$ و تشکیل یک دور هامیلتونی را بدهند.

از روی فرض استقرا دنباله v_iها را به صورت زیر می سازیم

$$w_1 w_2 \ldots w_{2^{m-1}} X_{2^{m-1}} X_{2^{m-1}_{-1}} \ldots X_2 X_1 W_1$$

که

$w_i=(1,u_i)\rightarrow$ **یعنی به سر رشته u_i یک 1 اضافه می کنیم**

$X_i=(0,u_i)\rightarrow$ **یعنی به سر رشته u_i یک 10 اضافه می کنیم**

واضح است که در این دنباله هر راس دقیقاً یکبار آمده . ولیکن باید ثابت کنیم هر دو راس متوالی مجاور نیز هستند.

برای اثبات آنکه هر دو راس متوالی، مجاورند حالات زیر را داریم:

1. **رئوس متوالی w_i, w_{i+1} باشند که واضح است چون**

$w_i=(1,u_i)$

$w_{i+1}=(1,u_{i+1})$

بنابر فرض استقرا u_{i+1},u_i تنها در یک جایگاه تفاوت دارند.

$\Big\}$ **w_{i+1},w_i تنها دریک جایگاه تفاوت دارند** $\Rightarrow w_i w_{i+1}\in E$

2. **رئوس متوالی X_i, X_{i+1} باشند: مانند بالا**

3. **رئوس متوالی $w_{2^{m-1}}, X_{2^{m-1}}$ باشندکه داریم**

$$\left.\begin{array}{l} w_{2^{m-1}}=(1,u_{2^{m-1}}) \\ X_{2^{m-1}}=(0,u_{2^{m-1}}) \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$w_{2^{m-1}}, X_{2^{m-1}}$ در جایگاه اول تفاوت دارند $\Rightarrow w_{2^{m-1}}X_{2^{m-1}}\in E$

4. رئوس متوالی w_1, X_1 باشند که مانند قبل داریم:

$$\left.\begin{array}{l} w_1=(1,u_1)\\ X_1=(0,u_1)\end{array}\right\} \Rightarrow$$ تنها در جایگاه اول تفاوت دارند $X_1, w_1 \Rightarrow X_1w_1 \in E$

لذا دنباله $w_1w_2\ldots w_{2^{m-1}}X_{2^{m-1}-1}\ldots X_2X_1w_1$ **معرف دور همیلتونی خواسته شده می باشد.**