مکمل یک گراف و گراف خود مکمل

مکمل یک گراف ساده:

فرض کنید G یک گراف ساده، با مجموعه رئوس $V(G)$ است مکمل G که با $\overline{G}$ نمایش می دهند یک گراف ساده دیگر است که همان مجموعه رئوس $V(G)$ را دارد و در آن هر دو راسی که در G مجاور نبوده اند مجاور می باشند.

- توجه کنید تعداد یالهای گراف G به علاوه یالهای مکمل آن برابر یالهای گراف کامل $|V(G)|$ راس خواهد شد.
- مکمل گراف کامل تهی است و بالعکس.
- مکمل یک گراف دو بخشی کامل عبارتست از اجتماع دو گراف کامل (اثبات به عهده شما!)

به عبارت ساده تر مکمل گراف ساده G همان گراف G است فقط هر جا یال داریم آن را حذف و هر جا نداریم آن را اضافه می کنیم

قضیه. اگر گراف G ناهمبند باشد $\overline{G}$ همبند است

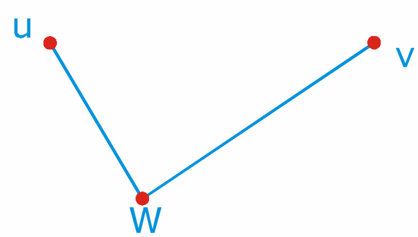
این قضیه را بعداً در فصل همبندی به روش دیگری نیز اثبات خواهیم کرد. اثبات (برهان خلف) فرض می کنیم $\overline{G}$ ناهمبند است یعنی $\overline{G}$ از حداقل دو مولفه تشکیل شده است دو راس دلخواه v,u را از G (که $\overline{G}$ نیز تعلق دارند) در نظر می گیریم.

v,u هر دو یا به دو مولفه متمایز $\overline{G}$ تعلق دارند یا هر دو در یک مولفه $\overline{G}$ واقعند.

اگر v,u در دو مولفه متمایز $\overline{G}$ باشند آنگاه v,u در $\overline{G}$غیر همجوراند بنابراین در G همجوارند با مسیری به طول یک و این با فرض ناهمبند بودن G در تناقض است.

اگر v,uدر یک مولفه $\overline{G}$ باشند راسی مانند w در مولفه دیگر $\overline{G}$ در نظر می گیریم w در $\overline{G}$ نه با u و نه با v همجوار است. بنابراین w در G هم با u و هم با v همجوار خواهد بود. یعنی در G مسیری به طول 2، دو راس v,u را به هم متصل می کند.

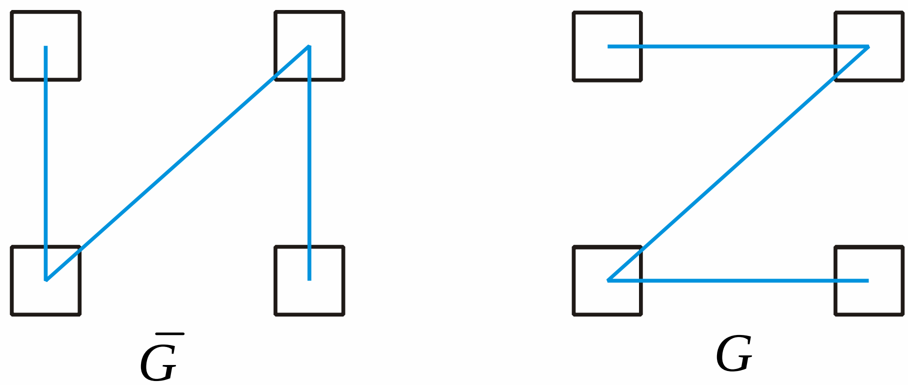
بنابراین نشان دادیم مسیری بین دو راس دلخواه وجود دارد.



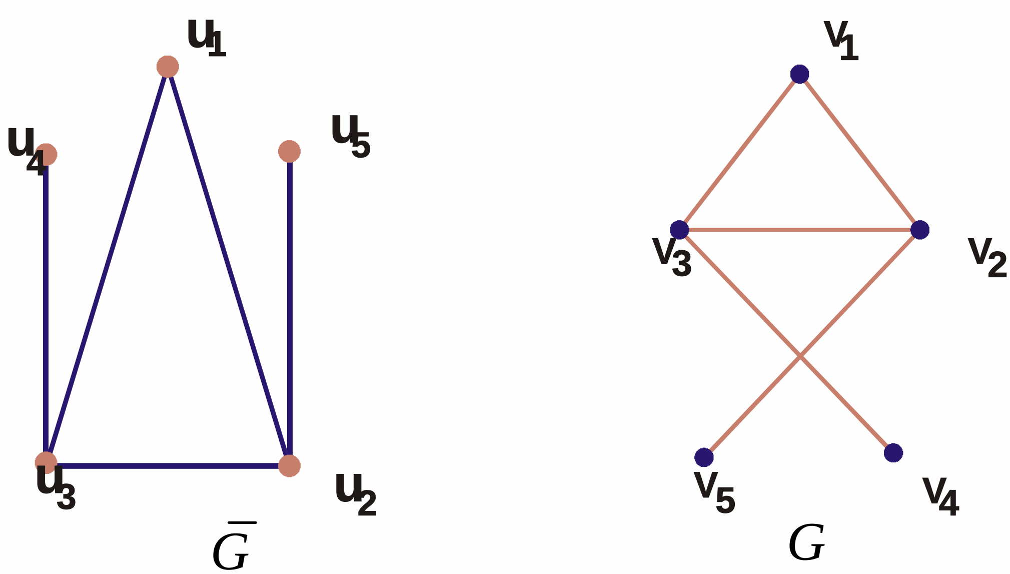
گراف خود مکمل:

گراف G را خود مکمل گویند اگر Gو $\overline{G}$ یکریخت باشند.

مثال. گراف چهارراسی زیر خود مکمل است.



گراف 5 راسی زیر نیز خود مکمل است.



G و $\bar{G}$ در بالا یکریختند زیرا کافی است برای هر i، u_i را با v_i متناظر بگیرند.

تمرین مهم.

شرط لازم و کافی برای وجود یک گراف خود مکمل n راسی را بیابید.

حل به عهده کاربر محترم.

راهنمایی. شرط لازم و کافی این است که $n = 4k$ یا $n = 4k + 1$ $(k \in \mathbf{Z})$ باشد. و برای اثبات آن از مجموع درجات می توانید کمک بگیرید.

قضیه. هرگراف خود مکمل همبند است.

فرض می کنیم گراف ساده G خود مکمل است یعنی G با $\overline{G}$ یکریخت است. باید نشان دهیم G همبند است. برهان خلف را به کار می بریم یعنی فرض می کنیم G ناهمبند است. در این صورت طبق قضیه قبل $\overline{G}$ همبند است. از طرفی می دانیم G و $\overline{G}$ یکریختند. ضمناً یکریختی حافظ همبندی است. بنابراین G نیز باید همبند باشد که با فرض برهان خلف (ناهمبندی G) تناقض دارد. بنابراین G نمی تواند نا همبند باشد یعنی G همبند است.