ماتریس مجاورت:

ماتریس مجاورت به طورکلی در گراف G (چه ساده باشد چه عمومی چه چند گانه و ...) به صورت زیر تعریف می گردد:

اگر رئوس G را با $v_1, v_2, \ldots, v_n$ نمایش دهیم ماتریس مجاورت آن ماتریسی $n \times n$ می باشد که درایه A_{ij} آن برابر است با تعداد یالهایی که v_i را به v_j متصل می کند.

بدیهی است در گراف های غیر جهت دار $A_{ij} = A_{ji}$ یعنی ماتریس متقارن می باشد.

حال اگر گراف طوقه نداشته باشد $\forall_i : A_{ii} = 0$

یعنی درایه های روی قطر اصلی همگی صفر می باشند.

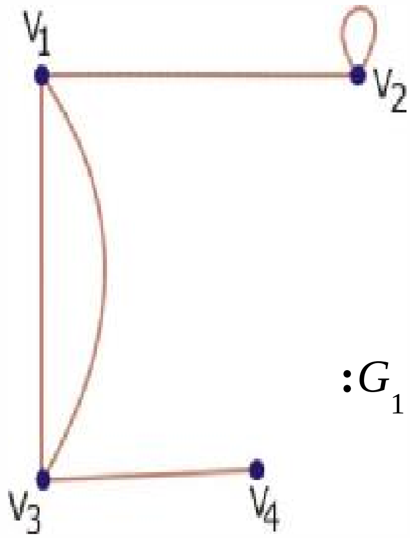
و اگر گراف چند گانه نباشد آنگاه

$$\forall_{i,j} : \begin{cases} A_{ij} = 0 \\ \text{یا} \\ A_{ij} = 1 \end{cases}$$

زیرا بین هر دو راس v_i, v_j حداکثر یک یال می تواند وجود داشته باشد.

لذا به راحتی دیده می شود ماتریس مجاورت یک گراف ساده ماتریس متقارن با درایه های **0** و **1** می‌باشد که تمام درایه های قطر اصلی آن الزاماً **0** است.

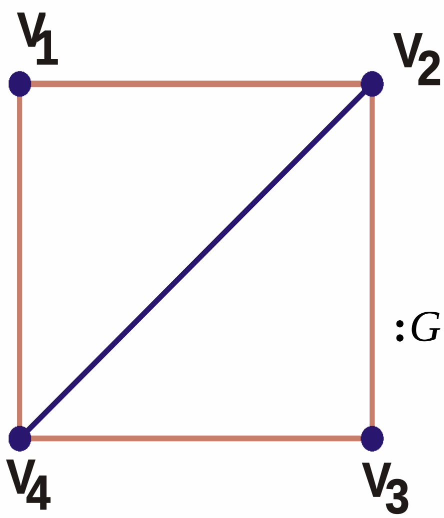
دو مثال از ماتریس های مجاورت:



((گراف غیر جهت دار))

$$:G_1 \to A_{G_1} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \to$$

ماتریسی متقارن



((گراف ساده))

$$:G_2 \to A_{G_2} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \to$$

ماتریسی متقارن از 0 و 1

قطر اصلی 0

ماتریس مجاورت نسبت به دو روش بعدی یعنی ماتریس وقوع و لیست مجاورت کاربرد بیشتری دارد

زیرا قابل فهم تر، ساده تر و نسبتاً با حافظه کم می باشد.

تمرین. اگر A ماتریس مجاورت گراف ساده G باشد. درایه های A^2معرف چه چیزی می باشند؟

حل. درایه های A^2 یعنی A^2_{ij} معرف تعداد مسیرهای به طول 2 بین v_i,v_j می باشد زیرا

$$A^2_{ij}=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}\times A_{kj}=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}\times A_{jk}$$

که $A_{ik}\times A_{jk}$ زمانی 1 می شود که هم از i به k و هم از k به j یالی باشد. و گرنه 0 مـی شـود پس به ازای هر مسیر به طول 2 بین j,i ، یک واحد به مجموع فوق افزوده می گردد و این یعنی مجموع فوق تعداد مسیرهای به طول 2 بین v_i,v_j را می شمارد.

تمرین. اگر A ماتریس مجاورت گراف G باشد ثابت کنید A^m_{ij}برابر با تعداد مسیرهای به طول mبین v_i,v_j می باشد.

به استقرا روی m ثابت می کنیم:

برای $m=1$ که بدیهی و برای $m=2$ هم در تمرین قبل ثابت کردیم.

فرض کنیم برای $m=k-1$، A^{k-1}_{ij} تعداد مسیرهای به طول $k-1$ مابین v_j,v_i باشد.

برای $m=k$ داریم:

$$A^k_{ij}=A\times A^{K-1}=\sum_{i=1}^{n}A_{iL}\times A^{k-1}_{Lj}$$

که $A_{iL}\times A^{k-1}_{Lj}$ وقتی صفر می شودکه $A_{iL}=0$ یعنی یالی بین v_L,v_i نباشد. یا $A^{k-1}_{Lj}=0$ یعنی بنا بر فرض استقرا تعداد مسیرهای به طول $k-1$ بین v_i,v_L، 0 نباشد. که واضح است کـه در هـر دو

صورت مسیری به طول k بین v_L, v_i وجود نخواهد داشت.

و $A_{iL} \times A_{Lj}^{k-1}$ اگر $A_{iL} = 1$ و $A_{Lj}^{k-1} \neq 0$ باشد برابر با A_{ij}^{k-1} می شود یعنی در این صورت چون یالی بین v_L, v_i وجود دارد پس می توان با یک گام از v_i به v_L آمد و پس از آن برای رفتن به v_j با $k-1$ گام بنـابر فرض استقرا A_{Lj}^{k-1} طریق موجود می باشد.

لذا $A_{iL} \times A_{Lj}^{k-1}$ تعداد مسیرهای به طول K را می شمرد که در گام اول از v_i به v_L برویم.

و از آنجا که در گام اول از v_i به هر کدام از رئوس همسایه آن می توانیم برویم کل تعداد مـسیرهای به طول بین v_j, v_i برابر با مجموع فوق می گردد.

لذا

$$A_{ij}^{k} = \sum_{L=1}^{n} A_{iL} \times A_{Lj}^{k-1}$$

برابر است با تعداد مسیرهای به طول K بین v_j, v_i

تمرین. از روی ماتریس مجاورت گراف Gماتریس بسازید مانند O که O_{ij}^{m} برابـر باشـد بـا تعـداد مسیرهای حداکثر به طول k بین v_j, v_i.

حل. کافی است $O = A + I$

یعنی درایه های قطر اصلی را یک کنیم زیرا

اگر درایه های قطر اصلی را یک کنیم یعنی برای هر راس یک طوقه در نظر گرفته ایم و واضح است که تعداد مسیرهای دقیقاً به طول m در این گراف جدید برابر است با تعداد مسیرهای به طول حـداکثر m در گراف قبلی زیرا به ازای هر مسیر با طول کمتر از m در گراف قبل با تعداد کافی دور زدن در یکی از طوقه ها

می توان طول آن را به m رساند.که می دانیم تعداد مسیرهای بــه طــول دقیقــاً m در گــراف جدیــد O_{ij}^{m} می‌باشد.