گرافهای اویلری:

همانطور که با پل های کونیگسبرگ آشنا شدیم در بسیاری موارد نیاز به آن داریم که تمام یالها را دقیقاً یکبار طی کنیم و به همان نقطه شروع برگردیم.

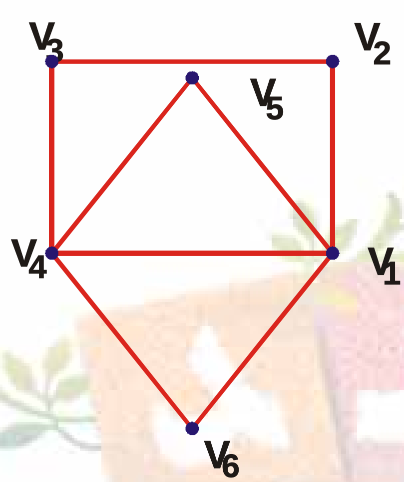
گراف اویلری. گراف همبند G را اویلری گویند اگر گذر بسته ای در آن وجود داشته باشد که از تمام یالها بگذرد.

گذر اویلری. به گذر بسته فوق الذکر گذر اویلری می گویند.

گراف نیمه اویلری. اگر شرط بسته بودن را از تعریف حذف کنیم.

- گراف اویلری همانند بازی رسم یک شکل بدون برداشتن خودکار از روی کاغذ می باشد یعنی اگر بتوان گرافی را به صورت پیوسته از یک جا شروع به رسم کرد و دوباره به همان جا رسید، اویلری می باشد:

مثال. گراف زیر اویلری است.



گذر بسته اویلر آن $v_1v_2v_3v_4v_1v_5v_6v_1$ می باشد.

یادآوری. می دانیم اگر G گرافی باشد که درجه تمام رئوس آن لااقل 2 باشد، G لااقل یک مدار دارد.

حال می خواهیم شرط لازم و کافی را برای اویلری بودن گراف بیان کنیم.

قضیه. گراف همبند G یک گراف اویلری است اگر و فقط اگر درجه تمام رئوس آن زوج باشد.

اثبات. اولاً اگر گراف G اویلری باشد و C یک گذر بسته اویلری آن باشد،دقت کنید در این گذر به ازای هر بار ورود از یک یال به راس v دقیقاً در حرکت بعد از این راس خارج می شود (راس ابتدایی هم یک بار اول خارج و در آخر وارد می شویم)

پس ملاحظه می کنید برای هر راس تعداد دفعات ورود و خروج آن یکسان بوده و از طرفی مجموع آنها درجه راس را تشکیل می دهد.

پس بدیهی است درجه هر راس گراف بایستی زوج باشد.

بر عکس فرض کنید که G گراف همبند نااویلری با حداقل یک یال و بدون راس درجه فرد باشد.

چنین گراف G را با کمترین یال ممکن انتخاب کنید. چون هر راس G حداقل دارای درجه دو است، G شامل یک گذر بسته است (تمرین 2.7.1). فرض کنید C یک گذر بسته با ماکسیمم طول ممکن در G باشد. بنابه فرض، C یک سیر اویلر ی G نیست و لذا $G-E(C)$ دارای مولفه G' با $e(G')>0$ است. چون C خودش اویلری است، راسهای درجه فرد ندارد؛ از این رو گراف همبند G' هم راسهای درجه فرد ندارد. چون $e(G')<e(G)$، از نحوه انتخاب G نتیجه می شود که، G' دارای سیر اویلر C' است. اینک، چون G همبند است، راس v در $V(C)\cap V(C')$ وجود دارد، و بدون اینکه به کلیت مطلب لطمه ای وارد شود، می‌توان فرض کرد که v آغاز و پایان C و C' است. اما در این صورت CC' یک گذر بسته G با

$e(CC') > e(C)$ است که متناقض با انتخاب G است.

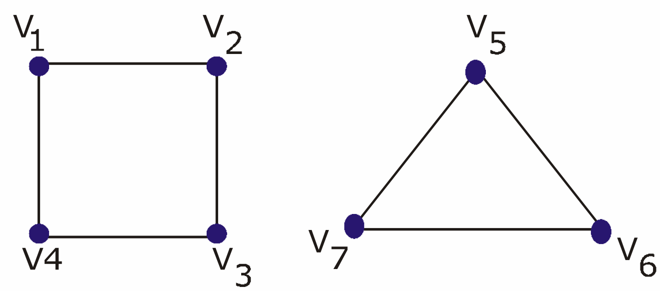
بنابراین برای هر گراف داده شده G برای چک کردن اویلری بودن آن کافی است دو شرط

1. همبند بودن و

2. درجه تمام رئوس زوج بودن را چک نمایید.

مثال. آیا هر گراف که درجه تمام رئوس آن زوج باشد اویلری است.

حل. خیر باید همبند باشد مثال نقض :



نتیجه. گراف G ، دارای یک گذر اویلری است اگر و تنها اگر <u>حداکثر</u> دارای دو راس درجه فرد بوده و همبند باشد.

اثبات. اگر G دارای گذر اویلری (نه الزاماً بسته) باشد مانند برهان قبل باید درجه تمام رئوس بجز رئوس ابتدایی و انتهایی گذر، زوج باشد.

برعکس، اگر G همبند دارای 2 راس درجه فرد باشد، برای بدست آوردن گذر اویلری آن کافی است یک راس u به گراف افزوده و به این دو راس درجه فرد متصل نمود. ما حصل گرافی همبند خواهد بود که تمام رئوس آن زوجند، این گراف یک گذر بسته اویلری دارد.

حال از این گذر بسته u را حذف می کنیم، گذر بسته را از u می بریم، سمت راست و چپ آن ابتـدا و انتهای یک گذر اویلری خواهند شد.

مثال. به ازای چه n هایی k_n اویلری است؟

حل. چون در k_n درجه هر راس $n-1$ است و $n-1$ باید زوج باشد پس n باید فرد باشد.

مثال. به ازای چه n,m هایی $k_{m,n}$ اویلری است.

راهنمایی. دقت کنید در گراف دو بخشی، با هر حرکت بر روی یال بخشی که در آن قرار داریم عوض می شود.

حل. به عنوان تمرین.