گرافهای همیلتونی :

پس از پایان تعاریف و مفاهیم گذر اویلری باید گفت که همانطور که در گذر اویلری هدف پیمودن تمام یالها دقیقاً یکبار و بازگشتن به نقطه شروع می باشد، در مبحث همیلتونی هدف طی کردن تمام راسها دقیقاً یکبار و برگشتن به راس آغازین می باشد. دقت کنید در دور همیلتونی الزاماً همه یالها پیمایش نمی شوند.

تعاریف:

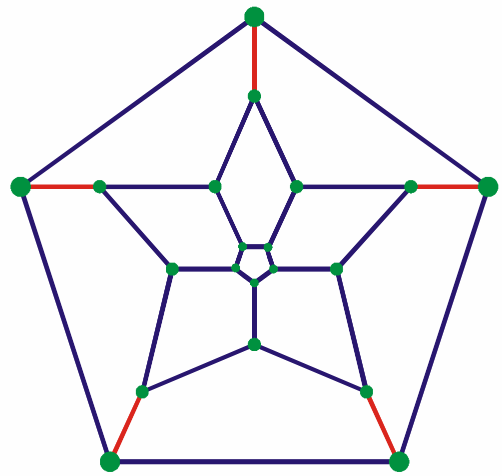
مسیر همیلتونی. مسیری از گراف G که شامل هر راس G باشد مسیر همیلتونی می نامند (در مسیر راس تکراری نداریم)

دور همیلتونی. مشابه بالا دوری است که شامل همه رئوس باشد.

دور همیلتونی دوری به طول $|V|$ می باشد.

نام همیلتون به این دسته از دورها از سر ویلیام همیلتون به خاطر تحقیقات وی در وجود این مدارها در گراف خاصی به نام گراف همیلتون گرفته شده است.

گراف هامیلتون یک دوازده وجهی منتظم می باشد که اگر آن را در صفحه بخواهیم رسم کنیم به صورت زیر در می آید:



جالب است که این گراف هامیلتونی بوده و دارای دورهای هـامیلتونی زیبـایی اسـت کـه در کمکـی آموزشی آمده است.

اما در مبحث گرافهای اویلری دیدیم که با یک شرط لازم و کافی برای اویلری بودن به تمـام ابهامـات پاسخ داده شد و بسیار به نظر می رسد که چنین شرط لازم و کافی ای در این مبحث نیز وجود داشـته باشـد ولیکن تعیین شرط یا شروط لازم و کافی همیلتونی بودن یک گراف هنوز به عنوان یک مساله لاینحـل بـاقی مانده است،

اگر چه شرط لازم کافی محکم نداریم ولیکن شروط لازم نسبتاً خوبی برای همیلتونی بودن وجود دارند که به ترتیب بیان می گردند:

قضیه. اگر G یک گراف ساده با $(n \geq 3)$ راس باشد و اگر برای هر دو راس نامجاور v,u داشته باشیم $\underbrace{\deg(u)}_{u \text{ درجه}} + \underbrace{\deg(v)}_{v \text{ درجه}} \geq n$ آنگاه G هامیلتونی است.

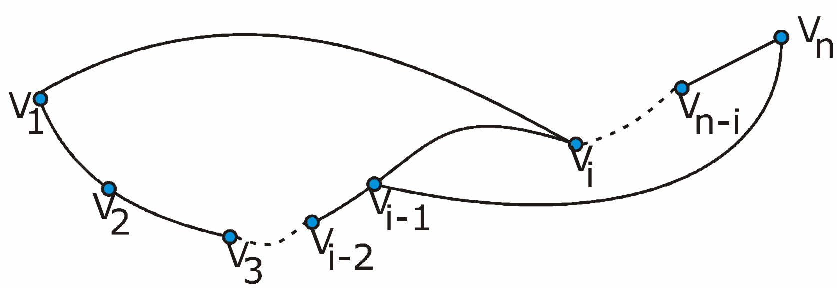
اثبات. چون G همبند است پس هر دو راس آن با مسیری به هم متصل می باشند بنـابراین مـی تـوان

یک مسیر همیلتنی مانند $v_1 \to v_2 \to \dots \to v_n$ بدست آورد. (چرا؟) اگر این مسیر هـامیلتونی خـود یـک مدار همیلتنی باشد حکم حاصل شده است در غیر این صورت رئوس v_n, v_1 غیر همجوارنـد. در ایـن صـورت می‌توان نوشت

درجه راس v_1 درجه v_n

$$d(v_1) + d(v_n) \geq n$$

آنگاه راسی مانند v_i همجوار با v_1 وجود دارد به طوری که v_{i-1} همجوار v_n است (چرا؟)



در این صورت یک مدار هامیلتونی در G مانند

$$v_1 \to v_2 \to \dots \to v_{i-1} \to v_n \to v_{n-1} \to \dots \to v_i \to v_1$$

یافته ایم پس G همیلتونی است.

نتیجه:

قضیه دیراک.

اگر در گراف ساده و همبند G با $n \geq 3$ راس داشته باشیم:

(v راس دلخواه از G است) $d|v| \ge \frac{n}{2}$

آنگاه G همیلتنی است.

اثبات. دو راس غیر همجوار مانند v,u را اختیار می کنیم (حتماً دو راس غیر همجوار وجود دارد چون اگر نباشد گراف کامل است و در نتیجه همیلتنی است)

آنگاه می توان نوشت $d(u)+d(v) \ge \frac{n}{2}+\frac{n}{2} \Rightarrow d(u)+d(v) \ge n$

پس طبق قضیه قبل G همیلتنی است.

مثال. در گراف اویلری شرط تکراری نبودن یالها را داریم و می دانیم که ممکن است درگذر اویلری راسها تکرار شوند، در عوض در گراف های همیلتونی شرط تکراری نبودن راسها را در دور همیلتونی داریم. آیا ممکن است در دور هامیلتونی یال تکراری داشته باشیم؟

حل. معلوم است که نه! زیرا اگر یالی تکرار شود دو راس دو سر آن هم تکرار می شود و این با تعریف دور همیلتونی تناقض دارد.