

گراف های مسطح

تعریف :

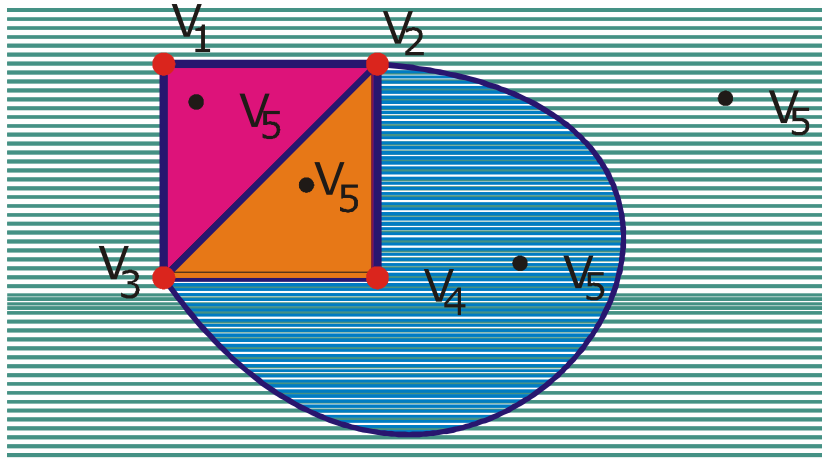
در مقدمه دیدیم که گراف K_4 را می توانید روی سطح کاغذ به گونه ای کشید که هیچ دویالی یکدیگر را قطع نکنند. به این گونه گرافها، گراف مسطح گوییم:

تعریف. گراف G را یک گراف مسطح گوییم هر گاه بتوان آن را روی سطح صاف (و یا روی سطح کره) به گونه ای رسم کرد که هیچ دو یالی یکدیگر را قطع نکنند.

همان گونه که در تعریف می بینید، در واقع مسطح بودن گراف معادل است با این که گراف را بتوان روی کره رسم کرد. این که گراف را روی کره ترسیم کنیم، فوایدی حاصل می آورد که در برخی محاسبات آنها خواهیم دید.

و اما اولین سوالی که به ذهن خطور می کند این است که آیا هر گرافی، یک گراف مسطح است یا نه؟! اگر همان طور که در مقدمه آمد سعی کرده باشید گراف K_5 را روی صفحه رسم کنید (از این به بعد منظور از رسم کردن گراف روی صفحه این است که گراف طوری رسم شود که هیچ دو یالی همدیگر را قطع نکنند). حتی اگر مدت زیادی به آن ور رفته باشید شکست خورده اید. کمی بعد (همین بخش، به کمک برخی تکنیکها و قضایا اثبات خواهیم کرد که $K_5, K_{3,3}$ و بسیاری گرافهای دیگر مسطح نیستند. البته برای اینکه کمی قانع شوید نامسطح بودن K_5 را همان طوری که در زیر ذکر شده است، می توانید به طور شهودی قبول کنید:

یک گراف K_4 روی صفحه رسم می کنیم و نواحی بین یالها را برای روشنتر شدن رنگ می کنیم:



می دانیم که K_4 جزئی از گراف K_5 است پس برای رسم یک گراف K_5 کفایت که یک راس V_5 به K_4 بیفزاییم سپس با کامل کردن گراف و رسم یالهای باقی مانده، گراف K_5 را بدست آوریم. همان گونه که در شکل می بینید راس V_5 در یکی از نواحی سبز، آبی، نارنجی یا بنفش باید بیافتد چرا که جز این 4 ناحیه، ناحیه ی دیگری در صفحه نداریم!

حال با آزمون و خطا مساله برایمان روشن خواهد گشت. مثلاً فرض کنید در ناحیه ی به رنگ نارنجی باشد. آیا می توانید V_5 را به V_1 رسم کنید طوری که با هیچ یالی برخورد نداشته باشد؟ من که این طور فکر نمی کنم! بررسی بقیه نواحی را برعهده ی شما می گذارم. حال باید به من حق بدهید که بگویم:

K_n گراف مسطح نیست (هر گاه $n \geq 5$, $n \in$)

مساله. مانند روشی که برای K_5 ذکر شد و به طور شهودی اثبات کنید که $k_{3,3}$ و

نیز $K_{n,m}$ ($n, m \geq 3$) گراف مسطح نیستند.

• لازم به ذکر است که از قضیه مربوط به توپولوژی که بالا استفاده کردیم با عنوان قضیه ی خم

ژردان (*Jordan Curve theorem*) که بیان می دارد از یک خم بسته روی صفحه یک نقطه را

از درون خم نمی توان به نقطه ای خارج از خم با خطی وصل کرد طوری که خط واصل دو نقطه

خم را قطع نکند.

شبکه رشد = شبکه ملی مدارس ایران



Olympiad.roshd.ir