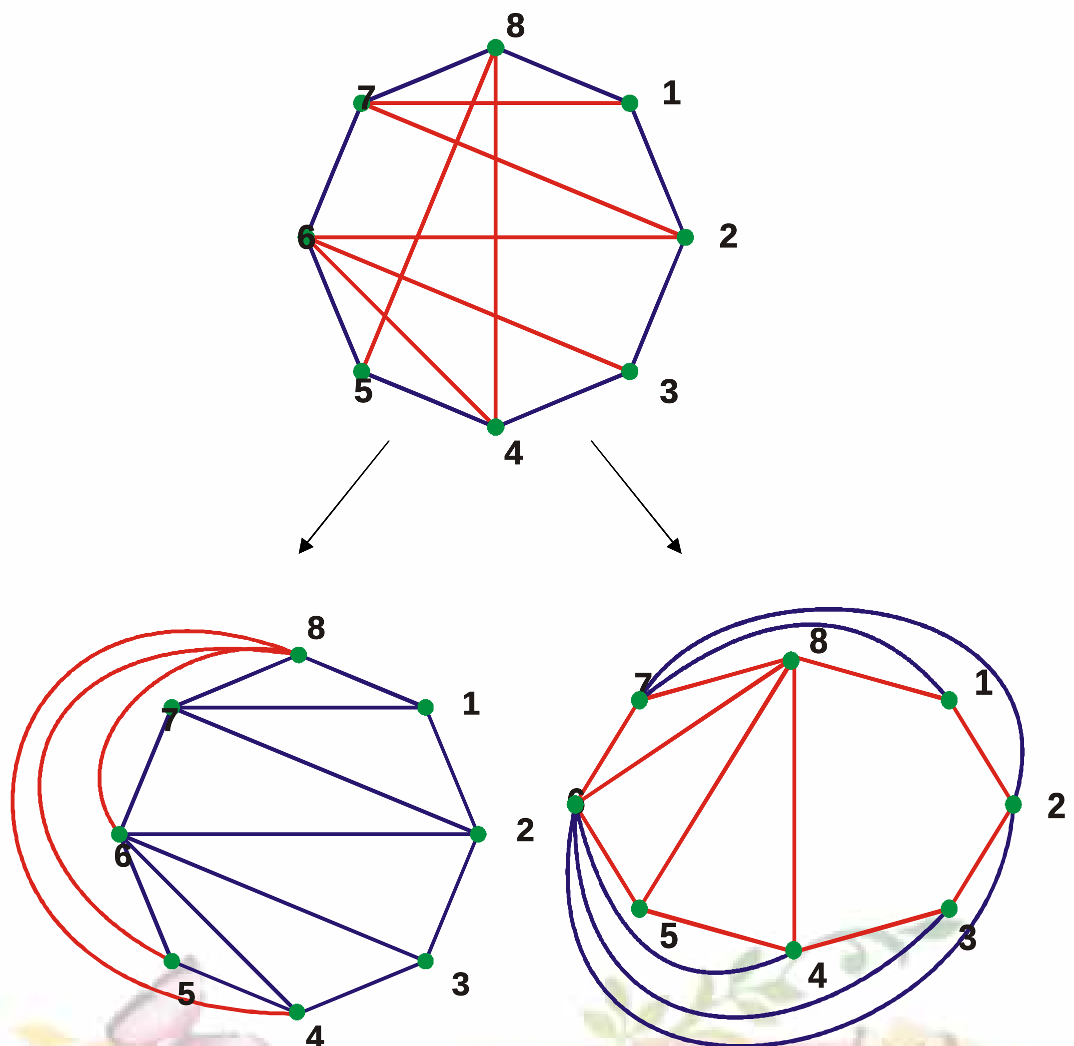
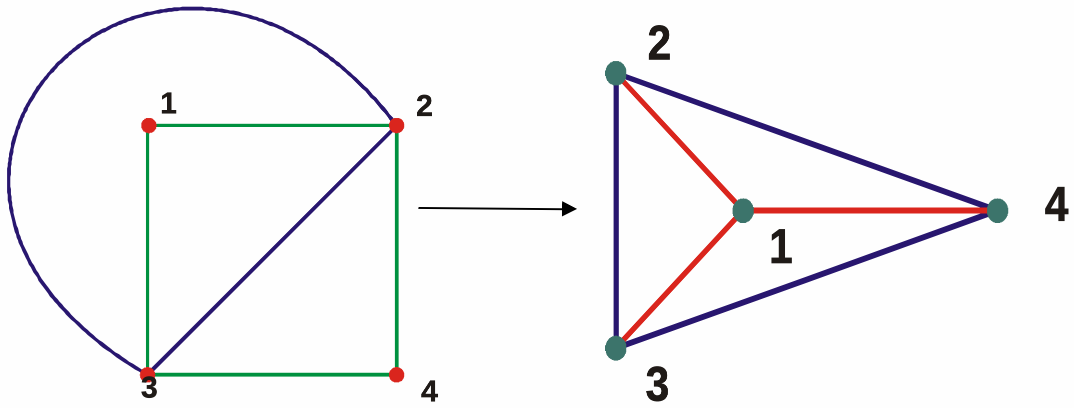
نمایش گراف مسطح با خطوط راست

گراف زیر یک گراف مسطح است. راه های متفاوتی برای رسم گراف زیر روی صفحه وجـود دارنـد کـه هیچ دو یالی هم دیگر را قطع نکنند. مانند آنهایی که در شکل می بینید.



اگر راس های یک گراف را نیز جابجا کنیم بعضی اوقات می توانیم نمایشی از گراف مسطح بسازیم کـه همه ی یالهای آن خطوط راست باشند مانند شکل زیر:



در سالی **1936**، واگنر $(Wagner)$ اثبات کرد که چنین خاصیتی برای هر گراف مسطح وجود دارد. این نتیجه توسط فری $(Fary)$ نیز به طور مستقل اثبات شد. یعنی قضیه ی زیر برقرار است.

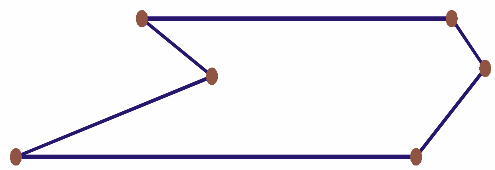
قضیه. هر گراف مسطح یک نمایش روی صفحه دارد به قسمتی که هر یال آن یک خط راست است.

به چنین نمایشی – یعنی هر نمایش گراف که در آن یالها خطوطی راست اند، یک نمایش $Stretch$ گویند– به هر گرافی که نمایش $Stretch$ داشته باشد یک گراف $Stretchable$ گوییم. در واقع واگنر ثابت کرد که هر گراف مسطح یک گراف $Stretchable$ است. وجه F از گراف را محدب گوییم هر گاه بین هر دو نقطه داخل یا روی این وجه پاره خطی رسم کنیم، پاره خط به طور کامل داخل وجه بیافتد. در شکل وجه های محدب و غیر محدب را می بینید:

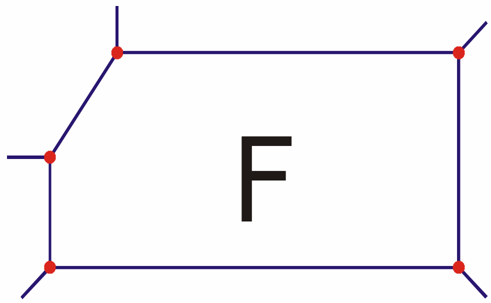
اثبات. اثبات به استقرا روی تعداد راس های گراف صورت می پذیرد. پایه ی استقرا گراف K_4 است. براحتی برای K_4 و زیر گراف های آن دیده می شود که همگی $Stretchable$ هستند.

حال فرض کنید که G گرافی با P راس باشد که $P > 4$ و همه ی گراف های با کمتر از P راس $Stretchable$ باشند. اگر G یک گراف ماکسیمال مسطح نباشد، به قدری به آن یال اضافه می کنیم که تبدیل به یک گراف ماکسیمال مسطح شود. پس می توان G را گرافی ماکسیمال مسطح فرض کرد بدون

اینکه از مساله چیزی کم شود. حال طبق قضیه گراف G حداقل دارای 4 راس از درجه کوچکتر یا مساوی 5 است.



وجه نامحدب



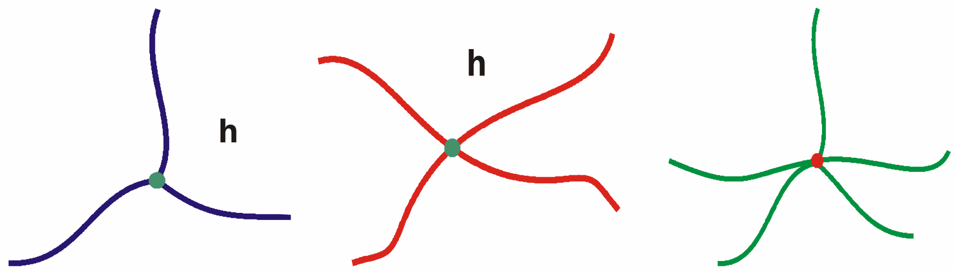
وجه محدب

همه ی درجه های گراف G به دلیل ماکسیمال مسطح بودن، از جمله وجه بیرونی گراف، به صورت مثلث اند. یعنی وجه بیرونی گراف سه راس دارد، پس یکی از چهار راسی که حداکثر درجه آنها 5 می باشد روی این وجه نیست. این راس را h می نامیم.

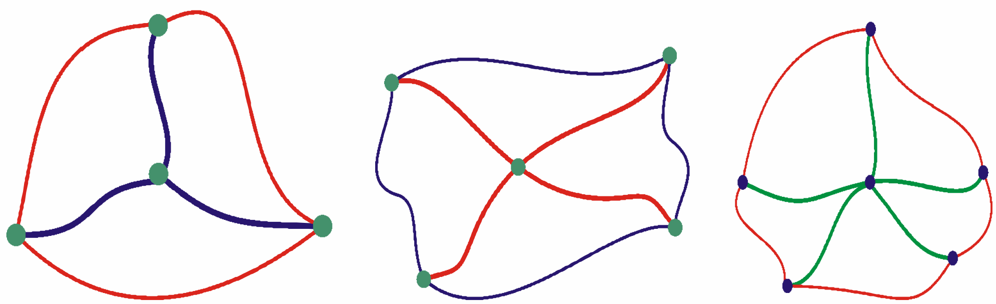
از آنجا که راس h دارای درجه ای برابر با سه، چهار و یا پنج می باشد، همان طور که در سطرهای اول و دوم در شکل زیر می بینید،این راس محل برخورد سه، چهار و یا پنج مثلث است. حال گراف $G-h$ را در نظر گیرید (سطر سوم شکل).

گراف $G-h$ مسطح است و تعداد راس های آن از G کمتر است. یعنی طبق فرض استقرا $G-h$، *Stretchable*، است همان گونه که در سطر چهارم شکل می بینید. پس $G-h$ را با خطوط راست روی صفحه رسم می کنیم که یک وجه (همان وجهی که در سطر چهارم شکل مشخص شده) به نام R را شامل می شود و R سه ضلعی، چهار ضلعی و یا پنج ضلعی است- اگر R یک شکل محدب باشد آن گاه راس

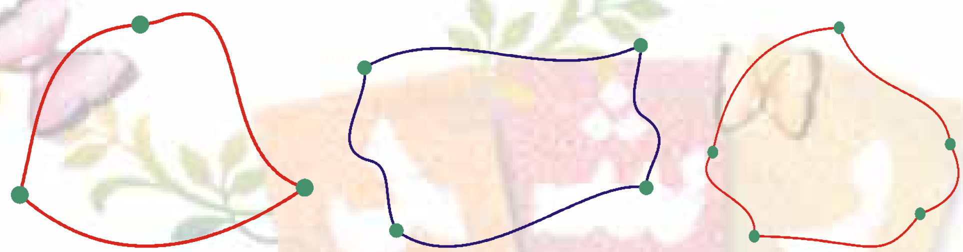
h را در داخل R می کشیم و سپس یالهای حذف شده را نیز دوباره رسم می کنیم (سطر پنجم شکل) – اما اگر R محدب نباشد، باید راس h را در ناحیه ی هاشور خورده مشخص شده در سطر ششم شکل برای چهار ضلعی ها و سطرهای هفتم تا نهم شکل برای پنجم ضلعی ها انتخاب کنیم. استقرا کامل شده و حکم اثبات می گردد.



سطر 1

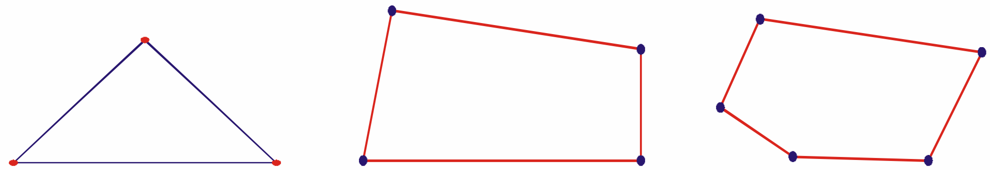


سطر 2

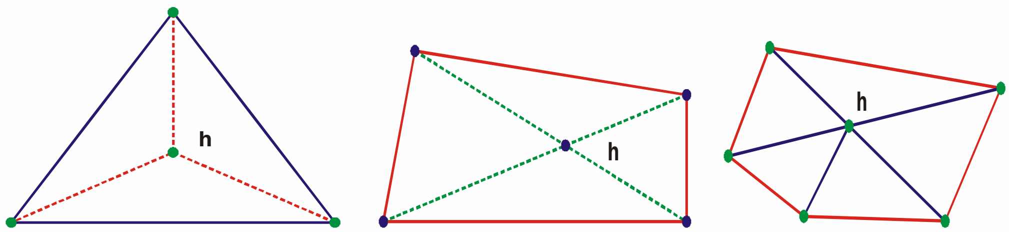


سطر 3

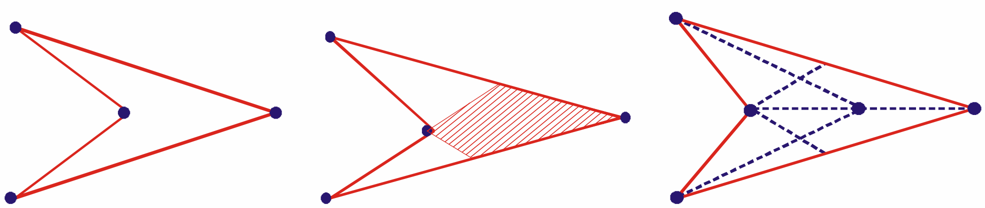
سطر 4



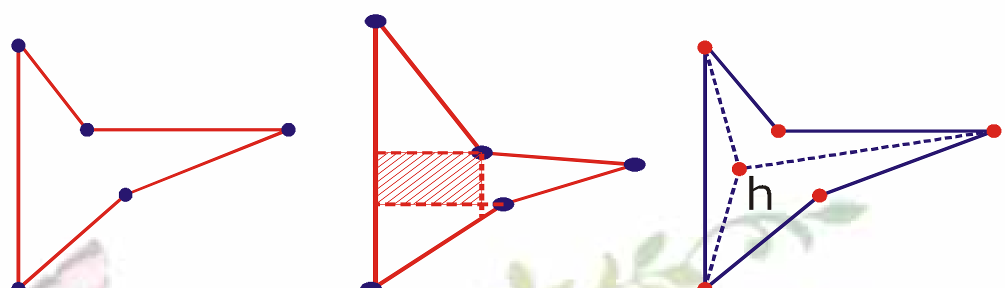
سطر 5



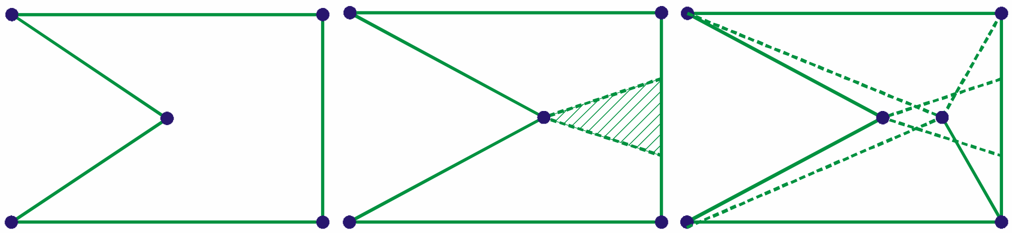
سطر 6



سطر 7



سطر 8



سطر 9