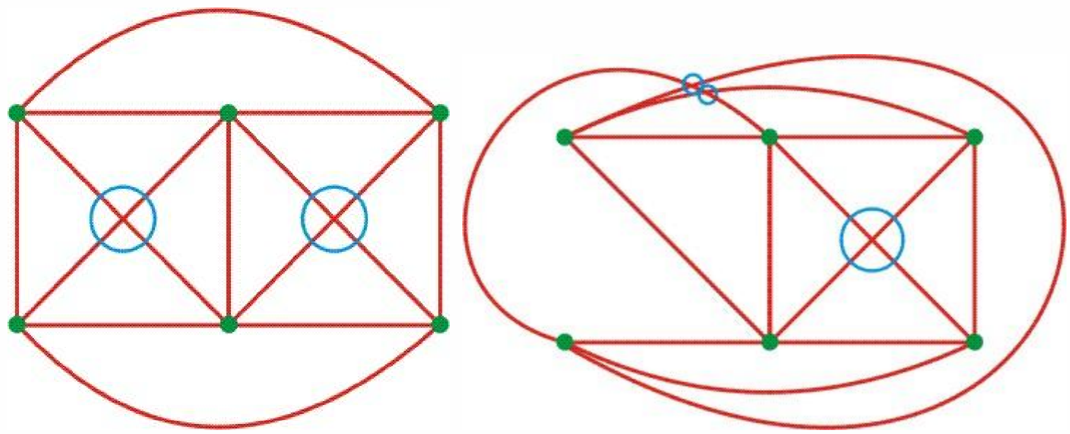
عدد تقاطع $\left(Crossing\ \ Number\right)$

دیدیم که گرافهایی هستند که می شود آنها را در صفحه رسم کرد به طوری که هیچ دو یالی همـدیگر را قطع نکنند – اما اگر گرافهای نامسطح را روی صفحه رسم کنیم چند یال به اجبار همدیگر را قطع خواهنـد کرد. حال مساله ای که اینجا می خواهیم بررسی کنیم تعداد این تقاطع ها *(Crossing)* است.

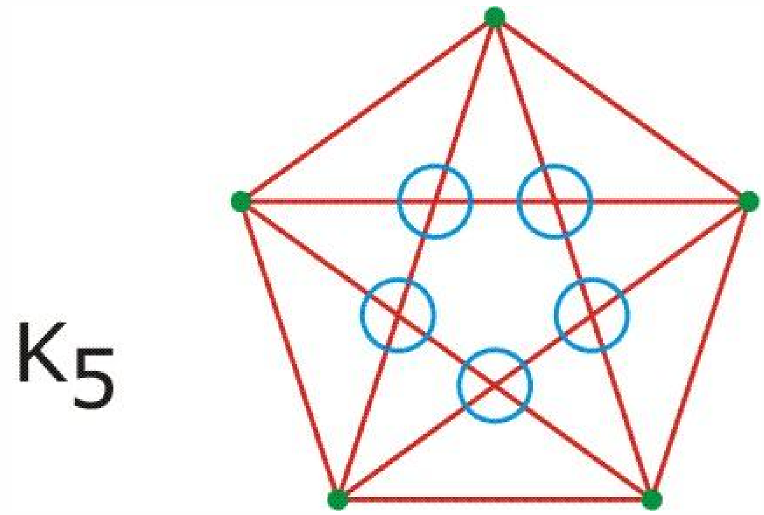
به دو گراف زیر توجه کنید:



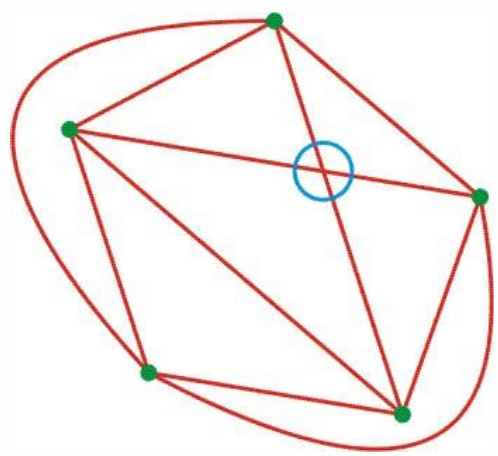
(الف) (ب)

در واقع هر دو یک گراف را نشان می دهند، ولی در شکل (الف) تعداد تقاطع ها یکی در حالی کـه در (ب) 2 تا می باشند.

اما به نظر شما آیا می توان این گراف را به گونه ای رسم کرد که یک تقاطع داشته باشـد – در واقـع چیزی که برای ما در این فصل جالب است، شکلی از گراف است که کمترین تعداد تقاطع ها در آن یافت شود – به گراف K_5 دوباره نظری می اندازیم:



در شکل بالا 5 تقاطع مشخص اند. حال همین گراف را به گونه ی زیر دوباره می کشیم:

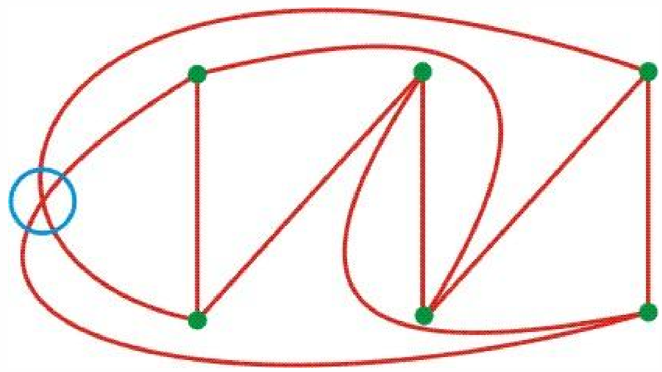


می بینیم که گراف K_5 را طوری رسم کردیم که تنها دارای یک تقاطع می باشد. از آنجا که K_5 یک گراف نامسطح است پس کمترین مقدار ممکن برای تعداد تقاطع های رسم این گراف یک می باشد. به این عدد یعنی عدد ″ یک″ به اصطلاح عدد تقاطع یا $Cros\sin gNamber$ گراف K_5 گوییم.

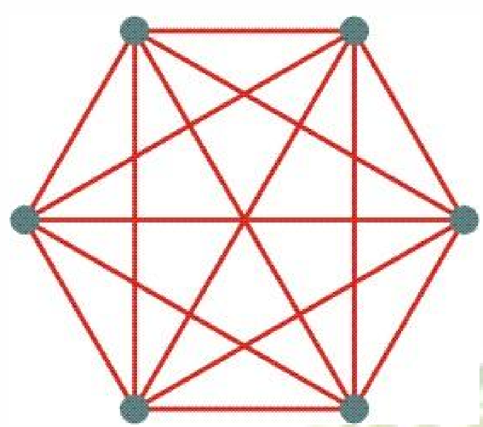
تعریف. عدد تقاطع یا $(Crossing\ \ Number)$ یک گراف مانند G عبارتست از کمترین مقدار ممکن

برای تعداد تقاطع های یالهای گراف G در رسم های مختلف گراف G در صفحه و آن را با $C_r(G)$ نمـایش می دهند.

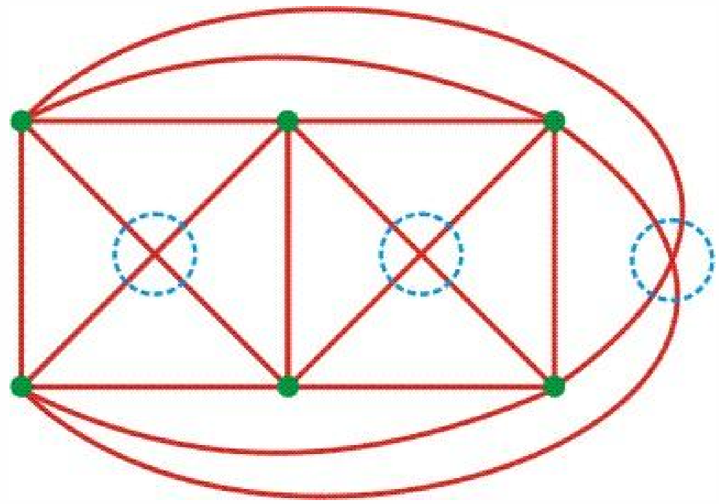
شکل زیر نشان می دهد که عدد تقاطع $K_{3,3}$ برابر 1 است. چرا؟



حال می خواهیم عدد تقاطع K_6 را بدست آوریم:

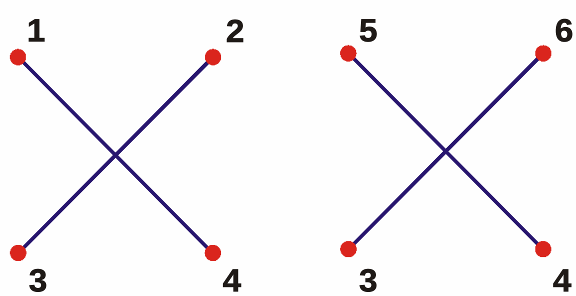


K_6 را می توان به صورت زیر نیز کشید که تعداد تقاطع های آن در این شکل 3 می باشد.



حال فرض می کنیم که K_6 را بتوان به گونه ای رسم کرد که دارای 2 تقاطع باشد. راس هــا را شــماره گذاری می کنیم.

فرض کنیم دو تقاطع مذکور به شکل زیر باشند:



طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو راس از گراف در هر دو تقاطع دخالت دارند – (اگر یالی با یال دیگــر تقاطع داشته باشد، دو راس لبه ی یال را گوییم در تقاطع دخالت دارند). حال اگر از این گراف راس شماره 4 را حذف کنیم چه می شود. دقت کنید که وقتی که راسی را حذف می کنیم یالهای مرتبط با آن نیز خــود بــه خود حذف می شوند. آنچه از گراف می ماند در واقع K_5 است. اما برسر دو تقاطع چه می آینــد. مــسلماً بــا

حذف راس 4 یالهای (4و1) و (4و5) نیز حذف گشته و در نتیجه هر دو تقاطع از بین می روند. یعنی توانسته ایم K_5 را روی صفحه مسطح رسم کنیم که می دانیم K_5 نا مسطح بوده و امکان ندارد.

در نتیجه K_6 را با کمتر از 3 تقاطع نمی توان رسم کرد. پس خواهیم داشت:

$$C_r\left(K_6\right)=3$$

دیدیم که محاسبه ی عدد تقاطع یک گراف نسبتاً دشوار است با این حال روابط و نامساویهای زیر برای برخی از گراف ها موجوداند که بدون اثبات آنها را ذکر می کنیم:

(1) برای هر n، $C_r\left(K_n\right)\le\frac{1}{4}\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right]\left[\frac{n-2}{2}\right]\left[\frac{n-3}{2}\right]$

(2) برای هر m,n، $C_r\left(K_{m,n}\right)\le\left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{m-1}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right]$

(3) برای هر n، $C_r\left(K_{3,n}\right)=\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right]$

(4) برای هر n، $C_r\left(K_{4,n}\right)=2\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right]$