دو گونه شمردن

در این قسمت قصد داریم یکی از زیباترین و در عین حال پراستفاده ترین، روش های مورد استفاده در ترکیبات، به نام دوگونه شمردن یا $Double\ \ counting$ را بررسی کنیم. قبل از هر چیز، لازم است اندکی به خود این روش اشاره کنیم تا آمادگی بیشتری برای درک مسایل حاصل شود؛ همان گونه که از نام این روش پیدا است، ما قرار است که یک کمیت ترکیباتی را از دو روش متفاوت بشماریم و چون این دو روش، یک چیز را می شمارند، طبیعتا با هم برابرند. در وهله اول، شاید این روش، بسیار بدیهی و ساده به نظر آید؛ اما این گونه نیست و بسیاری از مسایل ترکیباتی با استفاده از این روش حل می شوند؛ همان گونه که اصل لانه کبوتری - با صورت بسیار ساده اش – در حل بسیاری از مسایل به کار می آید؛ در این روش هم – دقیقا مثل اصل لانه کبوتری – فقط از اصل برابری دو مقدار به دست آمده استفاده می کنیم. این روش، در اصل، شامل دو قسمت است که ما در این فصل تا حد امکان به هر دو قسمت که یکی استفاده از این روش در به دست آوردن مقدار یک کمیت و دیگری استفاده از آن در اثبات های ترکیباتی می باشد، اشاره می کنیم. در این فصل، به فراخور موضوع از مثال ها و سوالات المپیادهای گذشته ریاضی و کامپیوتر استفاده نموده به منابع بعضی از موضوعات هم اشاره خواهیم کرد. حال بهتر است که قدم در راه گذشته، با این روش، بیشتر آشنا شویم.

مثال. به ازای هر $1 \le k < n$ ثابت کنید:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

حل. طرف چپ تعداد انتخاب های زیر مجموعه های k عضوی مجموعه ی $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ را به ما می دهد، ولی طرف راست چطور؟ مسلماً طرف دوم باید همین مقدار را به ما بدهد، اما چگونه؟

زیر مجموعه های k عضوی A را به دو قسمت تقسیم می کنیم:

- زیر مجموعه هایی که شامل n هستند.

تعداد این زیر مجموعه ها برابر است با تعداد زیر مجموعه های $k-1$ عضوی مجموعه ی $A' = A - \{n\}$. زیرا با اضافه کردن n به هر یک از زیر مجموعه های $k-1$ عضوی مجموعه ی A'، یک زیر مجموعه ی k عضوی مجموعه ی A به دست می آید که شامل n است و برعکس. طبق تعریف تعداد زیر مجموعه های $k-1$ عضوی مجموعه ی A' برابر است با $\binom{n-1}{k-1}$.

- زیر مجموعه هایی که شامل n نیستند.

تعداد این زیر مجموعه ها برابر است با تعداد زیر مجموعه های k عضوی مجموعه $A' = A - \{n\}$. طبق تعریف نیز تعداد زیر مجموعه های k عضوی مجموعه‌ی A' برابر است با $\binom{n-1}{k}$.

بنابراین طبق اصل جمع تعداد زیر مجموعه های k عضوی مجموعه ی A برابر است با $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ و چون دو طرف تساوی یک کمیت را می شمارند؛ پس با یکدیگر برابرند.

مثال. تساوی های ترکیبیاتی زیر را ثابت کنید:

الف) $P_k^n = n \times P_{k-1}^{n-1}$ ب) $P_k^n = (n-k+1)P_{k-1}^n$ ج) $P_k^n = \frac{n}{n-k}P_k^{n-1}$

حل. الف. سمت چپ، تعداد راه های انتخاب k نفر از بین n نفر است که ترتیب انتخاب افراد مهم است. سعی می کنیم طرف راست را هم به همین مقدار سوق دهیم تا اتحاد ثابت شود. برای انتخاب k نفر از بین n نفر، ابتدا می توان نفر اول را به n طریق انتخاب کرد و سپس نفرات دوم تا k ام ($k-1$ نفر) را از بین $n-1$ نفر باقی مانده به P_{k-1}^{n-1} طریق انتخاب کرد. پس طبق اصل ضرب حاصل برابر است با nP_{k-1}^{n-1}.

ب. سمت چپ، تعداد راه های انتخاب k نفر از بین n است که ترتیب انتخاب افراد مهم است. سعی می کنیم طرف راست را هم به همین مقدار سوق دهیم تا اتحاد ثاتب شود. برای انتخاب k نفر از بین n نفر، ابتدا نفر اول تا $k-1$ ام ($k-1$ نفر) را به P_{k-1}^{n} طریق انتخاب کرد و سپس نفر آخر را به $(n-k+1)$ طریق انتخاب کرد. پس طبق اصل ضرب حاصل برابر است با $(n-k+1)P_{k-1}^{n}$.

ج. سمت چپ، تعداد راه های انتخاب k نفر از بین n است که ترتیب انتخاب افراد مهم است. سعی می کنیم طرف راست را هم به همین مقدار سوق دهیم تا اتحاد ثابت شود. برای انتخاب k نفر از بین n نفر، ابتدا می توان یک نفر از افرادی که قرار نیست انتخاب شود (شخص A) را به n طریق انتخاب کرد و سپس از بین $n-1$ نفر باقی مانده k نفر را انتخاب کرد. این کار را به nP_{k}^{n-1} طریق می توان انجام داد ولی شخص A هر یک از $n-k$ نفری که انتخاب نشده اند می توانست باشد، پس هر حالتی را $n-k$ بار شمرده ایم. در نتیجه جواب مسئله برابر است با $\frac{n}{n-k}P_{k}^{n-1}$.

دقت کنید که از مثال های فوق در می یابیم که در اثبات های ترکیبیاتی تساوی ها، هر کجا جمع دیدیم باید از اصل جمع و هر کجا ضرب دیدیم باید از اصل ضرب و هر کجا تقسیم دیدیم باید از روش تقسیم یک کمیت بر تعداد بارهای تکرار هر حالت استفاده کنیم. اگر این روش را در پیش بگیرید اثبات تساوی هایترکیبیاتی آسان می شود.

مثال. تساوی های ترکیبیاتی زیر را ثابت کنید:

الف. $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$

ب. $\binom{m}{k}\binom{n}{m}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$

حل. الف. فرض کنید که می خواهیم یک تیم k عضوی انتخاب نموده، سپس یک عضو را به عنوان کاپیتان تیم انتخاب نماییم. از یک طرف، می توان k نفر عضو تیم را انتخاب نمود و بعد کاپیتان تیم را که حاصل سمت چپ تساوی خواهد بود. و از طرفی، می توان ابتداف کاپیتان تیم را به n طریق انتخاب نمود و سپس $k-1$ عضو دیگر تیم را، که حاصل طرف راست تساوی خواهد شد.

ب. فرض کنید که می خواهیم از بین n نفر m کارگر انتخاب نموده و سپس از بین کارگرها k سرکارگر انتخاب نماییم. از یک طرف، می توان m کارگر را انتخاب نمود و بعد سرکارگرها را که حاصل سمت چپ تساوی خواهد بود. و از طرفی، می توان ابتدا، سرکارگرها را به $\binom{n}{k}$ طریق انتخاب نمود و سپس $m-k$ کارگر ساده را، که حاصل سمت راست تساوی خواهد شد.

شاید به نظرتان آید که مثال های قبلی را به آسانی می توان با بسط دادن (روش جبری) اثبات کرد. حال، سعی کنید مثال های بعدی را هم با بسط دادن به دست آورید. (اگر توانستید!!)

مثال. تساوی های ترکیبیاتی زیر را ثابت کنید:

الف. رابطه ی واندرموند: $\sum_{k=0}^{p}\binom{m}{k}\binom{n}{p-k}=\binom{m+n}{p}$

ب. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$

حل. الف. طرف راست، تعداد راه های انتخاب یک زیر مجموعه ی p عضوی از یک مجموعه ی $m+n$ عضوی می باشد. سعی می کنیم طرف چپ را هم به همین مقدار سوق دهیم تا اتحاد ثابت شود. می توان $m+n$ عضو را به دو مجموعه یکی m عضوی و دیگری n عضوی افراز کرد. حال، هر زیر مجموعه p عضوی از این مجموعه ی $m+n$ عـضوی، k $(0 \le k \le p)$ عـضو از مجموعــه ی اول و $p-k$ عــضو از مجموعه ی دوم دارد؛ یعنی در حالتی که از مجموعه ی اول k عضو را انتخاب کنــیم زیــر مجموعــه ی p عضوی را به $\binom{m}{k}\binom{n}{p-k}$ طریق می توان ساخت. حال k هر یک از مقادیر بین 0 تا p را می تواند بگیرد پس طبق اصل جمع تعداد زیر مجموعه های مورد نظر برابر است با $\sum_{k=0}^{p}\binom{m}{k}\binom{n}{p-k}$ که ایــن مقــدار سمت چپ تساوی است. به این ترتیب حکم اثبات شد.

ب) این مسئله حالت خاصی از قسمت الف است، کافی است به جای m و P قرار دهید n و سپس از رابطه ی $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ استفاده کنید.

مثال. تساوی های ترکیبیاتی زیر را ثابت کنید:

الف. رابطه ی چوشی- چی: $(n \ge k)$

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\ldots+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$$

ب.

$$\binom{m}{0}+\binom{m+1}{1}+\ldots+\binom{m+l}{l}=\binom{m+l+1}{l}$$

حل. روابط بالا که به روابط «چوشی- چی» معروف هستند، هم ارز مــی باشــند. زیــرا مــی تــوان زابطه‌ی ب را با توجه به این که $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$، به شکل

$$\binom{m}{m}+\binom{m+1}{m}+\ldots+\binom{m+l}{m}=\binom{m+l+1}{l}$$

نوشت. حال اگر در رابطه ی بالا، قرار دهید $m+l=n$ و $l=k$، به رابطه ی الف می رسیم. پس تنها رابطه ی الف را اثبات می کنیم.

می دانیم سمت راست رابطه ی الف برابر است با تعداد زیر مجموعه های $k+1$ عضوی مجموعه ی $S=\{1, 2, \ldots, n+1\}$. حال سعی می کنیم تعداد این زیر مجموعه ها را به طریق دیگری بشماریم که به سمت چپ رابطه ی الف برسیم. برای این کار زیر مجموعه های $k+1$ عضوی S را بر اساس بزرگترین عنصر موجود در آن به دسته های زیر تقسیم می کنیم:

- بزرگ ترین عنصر آن $n+1$ باشد، که تعداد این زیر مجموعه ها برابر است با $\binom{n}{k}$.
- بزرگ ترین عنصر آن n باشد، که تعداد این زیر مجموعه ها برابر است با $\binom{n-1}{k}$.
- بزرگ ترین عنصر آن $n-1$ باشد، که تعداد این زیر مجموعه ها برابر است با $\binom{n-2}{k}$.
- بزرگ ترین عنصر آن $k+1$ باشد، که تعداد این زیر مجموعه ها برابر است با $\binom{k}{k}$.

به طور کلی تعداد زیر مجموعه های $k+1$ عضوی S که بزرگ ترین عنصر آن p باشد برابر است با $\binom{p-1}{k}$. زیرا با حذف p از این مجموعه ها یک زیر مجموعه ی k عضوی مجموعه ی $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ حاصل می شود و با اضافه کردن p به هر یک از زیر مجموعه های k عضوی مجموعه‌ی $\{1, 2, \ldots, p-1\}$، یک زیر مجموعه ی $k+1$ عضوی S به دست می آید که بزرگ ترین عنصر آن p است. حال چون $k+1\le p\le n+1$، در نتیجه داریم:

$$\sum_{p=k+1}^{n+1}\binom{p-1}{k}=\sum_{l=k}^{n}\binom{l}{k}=\binom{n+1}{k+1}$$

به این ترتیب حکم ثابت شد.

مثال. n نفر برای یک اردوی تفریحی به خارج از شهر رفته اند. در طی b روز، هر روز k نفر بـرای خرید مایحتاج اردو به شهر می روند $(k \le n)$. در ضمن می دانیم که هر دو نفری دقیقاً در l روز به شهر رفته اند و هر نفر دقیقاً در r روز به شهر رفته است. روابط زیر را ثابت کنید:

الف) $l\,(n-1)=r(k-1)$ **ب)** $bk = nr$ **ج)** $b\binom{k}{2}=l\binom{n}{2}$

اثبات. الف. فرد دلخواهی مانند A را در نظر بگیرید. این فرد، در r روز به شهر رفته است. در هـر روز، $k-1$ نفر با وی به شهر رفته اند؛ بنابراین در مجموع، A با $r(k-1)$ نفر به شهر رفته است. از طرف دیگر این فرد، با هر یک از افراد دیگر، در l روز به شهر رفتـه اسـت. بنـابراین در مجمـوع ایـن فـرد با $l\,(n-1)$ نفر به شهر رفته است. پس ثابت کردیم که $l\,(n-1)=r(k-1)$.

ب. می دانیم که هر فرد r روز به شهر رفته است بنابراین مجموعاً nr نفر به شهر رفته اند. از طرف دیگر، در هر روز k نفر به شهر رفته اند، بنابراین bk نفر به شهر رفته اند. پس $nr = bk$.

ج. تعداد کل جفت هایی که در کل به شهر رفته اند را می شماریم. از یک طرف در هر روز k نفـر یعنی $\binom{k}{2}$ جفت نفر به شهر رفته اند. پس مجموعاً $b\binom{k}{2}$ جفت نفر به شهر رفته اند. از طرف دیگر هر دو نفری با هـم دقیقـاً l بـار بـه شـهر رفتـه انـد، پـس $l\binom{n}{2}$ جفـت بـا هـم بـه شـهر رفتـه انـد. در نتیجه $b\binom{k}{2}=l\binom{n}{2}$.

مسئله بالا، اساس یک بخش زیبا در ریاضیات به نام «طرح های ترکیبیاتی» می باشد که روی این گونه موارد و نیز طرز ساختن آنها بحث می ند و کاربردهای زیادی هم دارد.

به دست آوردن مقدار یک کمیت ترکیباتی

در این روش، ما بیشتر مسایل را از طریق دوگان آنها، حل می کنیم. منظور از دوگان یک مساله، آن است که به جای پرداختن به شمردن خود کمیت، به شمردن مقداری که متناظر با آن کمیت است، بپردازیم و بدین گونه، سختی مساله را هموار نماییم. با یک مساله ساده شروع می کنیم.

مثال. آیا می توان ماتریسی به ابعاد $m \times n$ ساخت به طوری که مجموع درایه های هر سطر آن مثبت و مجموع درایه های هر ستون آن منفی شود؟

حل. شاید این مسئله در نگاه اول، مشکل به نظر آید؛ ولی با اندکی توجه، به سادگی حل می شود. ایده ی اصلی حل، این است که مجموع اعداد همه ی سطرها و مجموع اعداد همه ی ستون ها، هر دو یک کمیت را می شمارند و آن، مجموع تمام اعضای ماتریس است و مسلماً این مقدار نمی تواند هم مثبت و هم منفی باشد؛ یعنی این کار، امکان پذیر نیست.

مثال. مجموع تعداد عناصر تمام زیر مجموعه های یک مجموعه ی n عضوی چقدر است؟

حل. روش اول. بیایید این مسئله را به صورت ماتریسی بیان کنیم و از ایده ی مسئله ی قبل، کمک بگیریم. یک ماتریس $2^n \times n$ را به این روش می سازیم که برای هر کدام از n عدد، یک ستون و برای هر کدام از 2^n زیر مجموعه، یک سطر در نظر می گیریم و درایه ی $(i,\ j)$ ماتریس را برابر یک قرار می دهیم، اگر و فقط اگر عضو jام مجموعه ی S به زیر مجموعه ی i ام تعلق داشته باشد، صورت مسئله تبدیل به شمردن تعداد یک های موجود در این ماتریس می شود. (چرا؟)

اگر کمی دقت کنید، متوجه می شوید که صورت مسئله از ما، شمردن تعداد یک ها را- از طریق شمردن تعداد یک های هر سطر و جمع زدن عددهای به دست آمده- می خواهد. حال مجموع اعضای ماتریس مورد نظر را از طریق شمردن تعداد یک های هر ستون، به دست می آوریم. کافی است که ببینیم در هر ستون چند تا یک وجود دارد؛ و یا به بیان دیگر ببینیم تعداد زیر مجموعه هایی که یک عضو خاص به آن ها تعلق دارد، چقدر است؟ به راحتی می توان ثابت کرد که هر عضو در 2^{n-1} زیر مجموعه آمده است. چرا؟

حال، چون n عضو داریم و هر عضو در 2^{n-1} زیر مجموعه آمده است، تعداد یک های ماتریس $n\times 2^{n-1}$ تاست که این همان مقدار خواسته شده است.

روش دوم. می دانیم تعداد زیر مجموعه های k عضوی یک مجموعه ی n عضوی برابر است با $\binom{n}{k}$، بنابراین مسئله مقدار $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ را می خواهد. با توجه به این که $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$، داریم:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}=n2^{n-1}$$

زیرا $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$. (چرا؟)

مثال. تعداد دنباله های $A_1, A_2, \dots, A_k$ را که در شرایط زیر صدق می کنند، به دست آورید.

$$A_i \subseteq \{1,2,\dots,n\} \qquad 1\le i \le k$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = \{1,2,\dots,n\}$$

حل. برای اثبات، مانند مسئله ی قبل عمل می کنیم؛ بدین ترتیب که برای هر دنباله، ماتریس $n \times k$ می سازیم که در آن سطرها، نمایشگر زیر مجموعه ها و ستون ها نمایشگر اعضا هستند و اگـر عـضو i ام، به زیر مجموعه ی i ام تعلق داشته باشد، درایه های (i, j) را برابر یک و در غیر این صورت، برابر صفر قرار می دهیم. اکنون، حل مسئله معادل می شود با این که تعداد ماتریس هایی را که متناظر با این دنباله ها هستند، بشماریم. ابتدا، ببینیم که این ماتریس دارای چه خاصیتی است؛ تنها خاصیت ایـن مـاتریس این است که در هر ستون حداقل یک بار، عدد یک آمده است. حال، با توجه به ایـن نکتـه، مـسئله بـه راحتی قابل حل می باشد؛ زیرا n ستون داریم و هر ستون $2^k - 1$ حالت مختلف می تواند داشته باشـد. (چرا؟) بنابراین تعداد این ماتریس ها- که متناظر با تعداد دنباله ها است- برابر $(2^k - 1)^n$ می باشد.

مثال. مجموعه $A = \{1, 2, \ldots, k\}$ را در نظر بگیرید. دنباله ی $T_1, T_2, \ldots, T_n$ یک زنجیره به طول n خوانده می شود، اگر هر یک از T_i ها، یک زیر مجموعه از مجموعه ی A باشد و برای هر $1 \le i \le n-1$، داشته باشیم $T_i \subseteq T_{i+1}$، تعداد زنجیره های به طول n را محاسبه کرده و ادعای خود را ثابت کنید.

حل. در وهله ی اول، چنانچه به صورت ساده ی مسئله بنگرید و حتی اگـر قـصد داشـته باشـید فرمول بازگشتی برای آن پیدا کنید، شاید نتوانید آن را حل کنید.

پس بیایید به مسایل قبل برگردیم و از آنها مدد جوییم. باز هم، فرم ماتریسی مـسئله را در نظـر می گیریم که k ستون برای اعضای **1** تا k و n سطر به ترتیب برای هـر T_i $(1 \le i \le n)$ دارد. اگـر عـضو j متعلق به زیر مجموعه ی T_i باشد درایه ی (i, j) را برابر یک و در غیر این صورت برابـر صـفر قـرار مـی دهیم. حال، باز هم باید به خاصیت جادویی این ماتریس ها پی ببریم. تنها خاصیت این ماتریس ها، ایـن است که در هر ستون، یک ظاهر نمی شود یا اگر ظاهر شود بعد از اولین ظهور، مکرراً تا سطر n ام ظـاهر

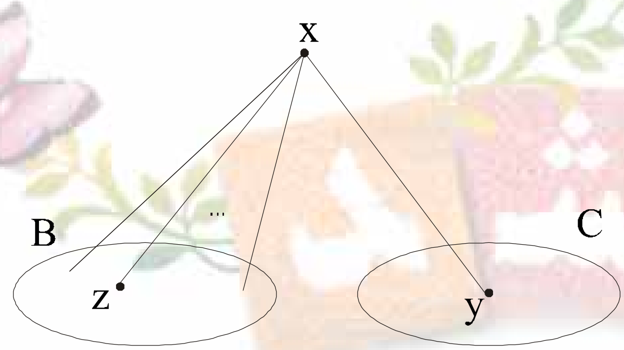
می شود. حال، چون k ستون و برای هر ستون $n+1$ حالت مختلف داریم. بنابراین، تعداد این مــاتریس ها و طبعاً تعداد زنجیره های مورد نظر برابر است با $(n+1)^k$.

مثال. در جمعی، $12k$ نفر حضور دارند. در این جمع، هر فرد $3k+6$ فرد دیگــر را مــی شناســد. همچنین، می دانیم تعداد افرادی که هر دو نفر ار می شناسند مقداری ثابت است. تعداد اعضای این جمع را به دست آورید.

حل. برای راحتی کار هر نفر را با یک نقطه (رأس) نشان می دهیم و اگر دو نفر بــا یکــدیگر آشــنا باشند یک پاره خط (یال) بین نقاط (رئوس) متناظر آنها رسم می کنیم. همچنین فرض می کنیم که تعداد آشناهای مــشترک هــر دو نفــر مقــدار ثابــت p باشــد. بــه عبــارت دیگــر بــه ازای هــر دو رأس x و y داریم $|N(x) \cap N(y)| = p$. حال مقدار k و p را به دست می آوریم.

برای به دست آوردن تعداد اعضای این جمع لازم است که یک کمیت را دوبار بسماریم. برای ایــن کار، ابتدا یک فرد (رأس) دلخواه مانند x را در نظر یم گیریم. سپس تمام افرادی که ایــن شــخص را مــی شناسند، در مجموعه ی B (مجموعه ی همسایه های رأس x) و تمام افراد ناآشنا با فرد مــورد نظــر را در مجموعه ی C جای می دهیم. حال، با توجه به شرایط مسئله، داریم:

$$|B| = 3k+6, |C| = 12k-(3k+6)-1 = 9k-7$$



حالت تعداد رابطه های آشنایی (یال های) بین مجموعه افراد (رئوس) B و مجموعه افراد (رئوس) C را به دو طریق می شماریم.

فرض کنید y یک رأس دلخواه از مجموعه ی C باشد. طبق فرض مسئله تعداد همسایه های (آشناهای) مشترک x و y، برابر p است. پس تعداد یال های یک همسایه ی مشترک x و y می باشد و بالعکس. در نتیجه تعداد یال های بین مجموعه ی B و C برابر است با

$p|C| = p(9k-7)$.

حال فرض کنید z یک رأس دلخواه از مجموعه ی B باشد. طبق فرض مسئله تعداد همسایه های (آشناهای) مشترک x و z، برابر p است. پس تعداد یال های بین رأس z و مجموعه ی B برابر p است. ولی طبق فرض مسئله تعداد کل یال های مجاور رأس z (مجموع یال های بین z و مجموعه ی B و یال های بین z و مجموعه ی C برابر $3k+6-p-1=3k+5-p$ می باشد. در نتیجه تعداد یال های بین مجموعه ی B و C برابر است با

$(3k+5-p)|B| = (3k+5-p)(3k+6)$.

حال چون $(3k+6)$ $(3k+5-p)$ و $p(9k-7)$ برابر تعداد یال های بین مجموعه B و C هستند، پس داریم:

$$\begin{aligned}
(3k+5-p)(3k+6) &= p(9k-7)\\
\Rightarrow -(3k+6)p+(3k+5)(3k+6) &= (pk-7)\\
\Rightarrow (12k-1)p &= 3(3k+5)(k+2)\\
\Rightarrow p &= 3\times\frac{(3k+5)(k+2)}{12k-1}
\end{aligned}$$

با توجه به این که p باید یک مقدار صحیح باشد، تنهــا جــواب $k = 3$ و $p = 6$ اســت. در نتیجــه تعداد افراد این جمع 36 نفر است.

همچنین به راحتی می توانید وجود جواب را برای 36 نفر امتحان کنید. گرافی 36 رأسی با شرایط مسئله بسازید.

اثبات نامساوی های ترکیباتی

تا کنون از دوگونه شمردن برای اثبات تساوی های ترکیباتی و به دست آوردن مقدار یک کمیــت ترکیباتی استفاده کردیم. حال به بررسی مسایلی می پردازیم که در آنها با استفاده از دوگونــه شــمردن نامساوی های ترکیباتی را اثبات می کنیم.

مثال. فرض کنید S مجموعه ای از n نقطه در صفحه باشد به طوری که

- هیچ سه نقطه ای بر یک استقامت نیستند.
- به ازای هر نقطه ی P از مجموعه ی S، حداقل k نقطه از S یافت می شوند که از P به یک فاصله اند.

ثابت کنید $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

حل. تعداد کل پاره خط هایی که از دو نقطه از نقاط S می گذرند را به دو طریق می شماریم. چون به ازای هر دو نقطه ای دقیقاً یک پاره خط وجود دارد، پس تعداد این پاره خطوط برابر است با $\binom{n}{2}$.

حال برای هر نقطه مانند P از این n نقطه، حداقل k نقطه وجود دارد که از آن به یک فاصله انــد. پس این k نقطه روی دایره ای به مرکز P قرار دارند و $\binom{k}{2}$ پاره خط را مشخص می کنند. حال چــون بــه

ازای هر نقطه حداقل $\binom{k}{2}$ پاره خط وجود دارد، پس تعداد پاره خط ها حداقل $n\binom{k}{2}$ است. اما در این بین از طرف دیگر هر خط را حداکثر دوبار شمرده ایم. زیرا اگر یک پاره خط را بیش از دوبار شمرده باشیم باید دوسر این پاره خط روی حداقل سه دایره قرار گرفته باشند. از طرف دیگر می دانیم که مرکز این دایره ها روی عمود منصف این پاره خط قرار دارد. پس سه نقطه پیدا کردیم که بر یک استقامتند. ولی این با فرض مسئله در تناقض است. در نتیجه هر پاره خط را حداکثر دوبار شمرده ایم. پس داریم:

$$\frac{1}{2}n\binom{k}{2}\le\binom{n}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{nk(k-1)}{2}\le n(n-1)$$

$$\Rightarrow \quad k^2-k-2(n-1)\le 0$$

$$\Rightarrow \quad k\le\frac{1+\sqrt{1+8(n-1)}}{2}$$

$$\Rightarrow k<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{8n}=\frac{1}{2}+\sqrt{2n}$$

مثال. فرض کنید G یک گراف ساده با n رأس و m یال باشد. اگر $m>\frac{n}{4}(1+\sqrt{4n-3})$ باشد، ثابت کنید G دوری به طول 4 دارد.

حل. از برهان خلف استفاده می کنیم. فرض کنید این گراف هیچ دوری به طول 4 نداشته باشد. حال برای حل این مسئله و دسیدن به تناقض تعداد جفت های متمایز رئوس را به دو طریق می شماریم.

از یک طرف این مقدار برابر است با $\binom{n}{2}$.

از طرف دیگر فرض کنید $N(x)$ مجموعه رئوس متصل بـه رأس x (مجموعـه ی همـسایه هـای x) باشد. واضح است که $|N(x)| = d(x)$. حال به ازای هر دو رأس دلخواه x و y، $|N(x) \cap N(y)| \leq 1$. زیـرا اگر دو رأس x و y، دو همسایه مشترک مانند u و u داشته باشند، دور $xuyux$ یک دور به طول 4 است و این برخلاف فرض است. پس هر د رأسی حداکثر یک همسایه ی مشترک دارند. حـال بـه ازای هـر رأس دلخواهی مانند x، تعداد جفت رأس های همسایه ی x برابر است با $\binom{|N(x)|}{2} = \binom{d(x)}{2}$ و چون هیچ دو رأسی بیش از یک همسایه ی مشترک ندارند، پس تعداد جفت رأس های متمایز این گراف حداقل برابـر است با $\sum_{x\in V(G)} \binom{d(x)}{2}$. حال با توجه به این که تعداد جفت رأس های متمایز برابر $\binom{n}{2}$ است داریم:

$$\sum_{x\in V(G)} \binom{d(x)}{2} \leq \binom{n}{2}$$

حال با استفاده از نامساوی «ین سن» داریم:

$$\binom{n}{2} \geq \sum_{x\in V} \binom{d(x)}{2} \geq n \binom{\frac{2m}{n}}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad \binom{n}{2} \geq \frac{m(2m-n)}{n}$$

$$\Rightarrow \qquad 2m^2 - nm - \frac{n^2(n-1)}{2} \leq 0$$

$$\Rightarrow m \leq \frac{n + \sqrt{n^2 + 4n^2(n-1)}}{4} = \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n-3})$$

و این برخلاف فرض مسئله است و به تناقض رسیدیم. پس این گراف دوری به طول **4** دارد.

مثال. فرض کنید G یک گراف ساده با n رأس و m یال باشد. ثابت کنید این گراف حداقل $\frac{4m}{3n}(m-\frac{n^2}{4})$ مثلث (دور به طول **3**) دارد.

حل. در این مسئله، به جای شمردن مستقیم تعداد مثلث ها، سعی می کنیم مثلث هایی را که به صورت اجباری به وجود می آیند بشماریم.

فرض کنید S تعداد مثلث های گراف G باشد. اگر $N(x)$ مجموعه ی همسایه های رأس x باشد، به ازای هر یال دلخواه $xy\in E(G)$ داریم:

$$|N(x)\cap N(y)|=|N(x)|+|N(y)|-|N(x)\cup N(y)|\geq d(x)+d(y)-n$$

بنابراین به ازای هر دو رأس مجاور در G، حداقل $d(x)+d(y)-n$ رأس داریم که همسایه ی مشترک x و y هستند. در نتیجه تعداد مثلث هایی که شامل یال xy هستند حداقل $d(x)+d(y)-n$ خواهد بود. حال چون هر مثلث سه یال دارد، در نتیجه

$$S\geq\frac{1}{3}\sum_{xy\in E(G)}(d(x)+d(y)-n)$$

حال برای ساده کردن عبارت $\sum_{xy\in E(G)}(d(x)+d(y)-n)$ از تکنیک آشنای خود یعنی دو گونه شمردن استفاده می کنیم. برای این کار کافی است به این نکته توجه کنیم که به ازای هر رأس x، $d(x)$ دقیقاً $d(x)$ بار در مجموع فوق ظاهر می شود. بنابراین داریم:

$$S\geq\frac{1}{3}\sum_{xy\in E(G)}(d(x)+d(y)-n)=\frac{1}{3}\{\sum_{x\in V(G)}(d(x))^2-mn\}$$

مثال. n نقطه در صفحه داده شده اند. نشان دهید که کم تر از $n\sqrt{n}$ جفت از این نقاط وجود دارند، به طوری که فاصله ی بین هر جفت برابر یک سانتی متر باشد.

حل. آری باز هم از دوست آشنای خود استفاده خواهیم کرد. ولی این بار چطور؟

فرض کنید $S=\{P_1,P_2,\ldots,P_n\}$، مجموعه ی نقاط مفروض باشد. همچنین فرض کنید a_i، تعداد نقاطی از S باشد که فاصله ی آنها از P_i برابر یک سانتی متر است. در نتیجه تعداد جفت نقاط مورد نظر برابراست با:

$$m=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{2}$$

حال فرض کنید C_i دایره ای به شعاع یک سانتی متر و به مرکز P_i باشد. هر دو دایره ای را که از بین این دایره ها (دایره های C_1، C_2، ...، C_n) در نظر بگیریم حداکثر در دو نقطه یکدیگر را قطع می کنند. بنابراین تعداد نقاط برخورد دایره ها حداکثر $n(n-1)=2\binom{n}{2}$ می باشد. حال بیایید نقاط تناطع دایره ها را به یک طریق دیگر بشماریم:

برای هر نقطه ی P_i، $\binom{a_i}{2}$ دایره وجود دارد که P_i نقطه ی برخورد آنها است. (چرا؟) بنابراین حداقل نقاط برخورد دایره ها برابر است با $\sum_{i=1}^{n}\binom{a_i}{2}$. ولی حداکثر تعداد نقاط برخورد دایره ها نیز برابر است با $n(n-1)$. در نتیجه داریم:

$$n(n-1)\geq\sum_{i=1}^{n}\binom{a_i}{2}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i$$

$$\Rightarrow\qquad 2n(n-1)+2m\geq\sum_{i=1}^{n}a_i^2$$

با استفاده از نامساوی کوشی- شوارتز داریم:

$$2n(n-1)+2m \ge \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \ge \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \frac{4m^2}{n}$$

$$\Rightarrow \qquad 2m^2 - nm - n^2(n-1) \le 0$$

$$\Rightarrow \qquad m \le \frac{n+\sqrt{8n^3-7n^2}}{4} < n\,\frac{1+\sqrt{8n}}{4}$$

$$\Rightarrow \qquad m < n\,\frac{\sqrt{n}+3\sqrt{n}}{4} = n\sqrt{n}$$

مثال. در یک n ضلعی محدب، تمام قطرها را رسم کرده این. اگر هیچ سه قطری همرس نباشند، n ضلعی به چند ناحیه تقسیم می شود؟

حل. روش اول. این مسئله، یکی از زیباترین مسایلی است که با استفاده از این تکنیک حـل مـی شود. در این مسئله، n ضلعی را به نواحی ای تقسیم کرده این. حال فرض کنید که تعداد سه ضلعی های به دست آمده را p_3 ، تعداد چهار ضلعی های به دست آمده را p_4 و ... و بالاخره به تعداد k ضلعی های به دست آمده را p_k بگیریم. (k حداکثر چه مقداری می تواند باشد؟) بنابراین مسئله از ما خواسته است که مقدار $m = p_1 + p_2 + \ldots + p_k$ را به دست آوریم. ابتدا تعداد نقطه های داخلـی را- کـه محـل برخـورد قطرهای n ضلعی محدب می باشند- تعیین می کنیم. به ازای هر چهار رأس از رئوس n ضلعی دقیقاً یک نقطه ی تقاطع داخلی وجود دارد. بنابراین تعداد نقطه های داخلی برابر است با $\binom{n}{4}$. حال مجموع زوایای داخلی را به دو روش می شماریم؛ از یک طرف، این مقدار برابر است با مجموع زوایای داخلی تمام نواحی ایجاد شده:

$$180\{p_3(3-2)+p_4(4-2)+\ldots+p_k(k-2)\} = 180(3p_3+4p_4+\ldots+kp_k-2m)$$

و از طرف دیگر، می توان گفت که هر نقطه ی داخلی، به اندازه ی **360** درجــه بــه مجمــوع زوایــا اضافه می کند و علاوه بر نقاط داخلی، رئوس n ضلعی نیز مجموعاً بــه انــدازه ی $180(n-2)$ درجــه در مجموع زوایا سهم دارند. بنابراین، مجموع زوایای نواحی برابر است با:

$$\binom{n}{4}\times 360+(n-2)\times 180$$

در نتیجه:

$$3p_3+4p_4+\ldots+kp_k-2m=2\times\binom{n}{4}+(n-2) \qquad (1)$$

حال مجموع رئوس تمام نواحی از یک طرف برابر با $3p_3+4p_4+\ldots+kp_k$ خواهد بود، و از طرف دیگر می توان گفت که رئوس داخلی، در **4** ناحیه و رئوس n ضلعی در $n-2$ ناحیه شــمرده مــی شــوند. (چرا؟) بنابراین:

$$3p_3+4p_4+\ldots+kp_k=\binom{n}{4}\times 4+n(n-2) \qquad (2)$$

حال از روابط (**1**) و (**2**) به دست می آوریم که:

$$2m=2\times\binom{n}{4}+(n-1)(n-2)\Rightarrow m=\binom{n}{4}+\binom{n-1}{2}$$

روش دوم. تعداد نقاط تلاقــی قطرهــا داخــل n ضــلعی برابــر اســت بــا $\binom{n}{4}$. پــس یــک گــراف مسطح $V=n+\left[\begin{matrix}n\\4\end{matrix}\right]$ رأسی داریم که درجه ی n رأس آن برابر $n-1$ و درجه ی $\binom{n}{4}$ رأس دیگر آن برابر **4** است. پس تعداد یال های این گراف برابر است با $E=\frac{n(n-1)}{2}+2\binom{n}{4}$.

حال طبق قضیه ی اویلر در گراف های مسطح می دانیم $V + F = E + 2$. پس

$$F = E - V + 2 = \frac{n(n-1)}{2} + 2\binom{n}{4} - \binom{n}{4} - n + 2$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \binom{n}{4} + 1 = \binom{n-1}{2} + \binom{n}{4} + 1$$

ولی یکی از این نواحی، ناحیه ی خارجی است. پس تعداد نواحی داخلی n ضلعی برابر است

با $\binom{n-1}{2} + \binom{n}{4}$.

مثال. قضیه ی sperner . فرض کنید که X یک مجموعه ی n عضوی و $G = \{A_1, A_2, \dots, A_p\}$ یک

خانواده از زیر مجموعه های X باشد، به طوری که برای هر $i, j = 1, 2, \dots, p$، $i \neq j$، داشته

باشیم: $A_i \not\subseteq A_j$. ثابت کنید که p حداکثر برابر است با $\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

اثبات. دنباله ی $M_1, M_2, \dots, M_n$ از زیر مجموعه های X را، یک زنجیره به طول n می نامیم

هرگاه:

$$M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \dots \subset M_{n-1} \subset M_n = X$$

و به ازای هر $1 \le i \le n$، داشته باشیم $|M_i| = i$.

تعداد زنجیره های به طول n که از زیر مجموعه های یک مجموعه ی n عضوی تشکیل شده باشند

برابر است با $n!$. (چرا؟) حال اگر $A \subseteq X$ و $|A| = r$ باشد، تعداد زنجیره های به طول n که شامل A

باشند برابر است با $r!(n-r)!$. زیرا اگر دنباله ی

$$M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_{r-1} \subset A \subset M_{r+1} \subset \dots \subset M_n$$

زنجیره ی مورد نظر باشد، A ،$M_1, M_2, ..., M_{r-1}$ $r!$ حالت و دنباله ی $A, M_{r+1}, M_{r+2}, ..., M_n$ ، $(n-r)!$ حالت دارند.

اگر A_i و A_j هیچ یک زیر مجموعه ی هم نباشند، هر زنجیره که شامل A_i است، نمی تواند شامل A_j نیز باشد و برعکس. بنابراین اگر $|A_i| = n_i$ $(i = 1, 2, 3, ..., p)$، با توجه به خاصیت G می توان گفت:

$$\sum_{i=1}^{p} n_i!(n-n_i)! \le n!$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{p} \frac{n_i(n-n_i)!}{n!}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\binom{n}{n_i}} \le 1$$

و چون بیش ترین مقدار $\binom{n}{n_i}$، برابر است با $\binom{n}{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}$. بنابراین:

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\binom{n}{n_i}} \le 1 \Rightarrow \frac{p}{\binom{n}{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}} \le 1 \Rightarrow p \le \binom{n}{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}$$

و این همان حکم خواسته شده است. حال، برای این که ثابت کنیم یک چنین خانواده ای در G وجود دارد، کافی است که G را مجموعه ی تمام زیر مجموعه های $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ عضوی X بگیریم. واضح است که این خانواده دارای خاصیت خواسته شده است.

مثال. فرض کنید p عددی اول باشد و داشته باشیم:

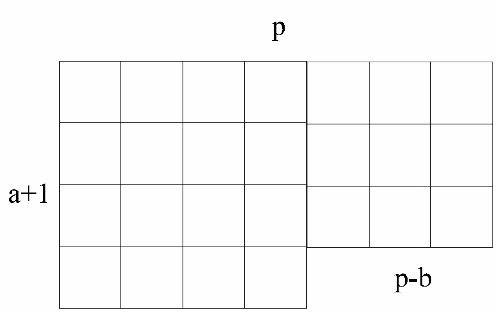
$$\begin{cases} m = ap + b, & 0 \le b < p \\ n = cp + d, & 0 \le d > p \end{cases}$$

ثابت کنید که رابطه ی هم نهشتی زیر برقرار است:

$$\binom{m}{n} \equiv \binom{a}{c}\binom{b}{d} \pmod{p}$$

حل. ابتدا توجه کنید که اگر $m < n$ باشد، در آن صورت $a < c$ و یا $b < d$. در هر دو صورت هر دو طف همنهشتی برابر صفر خواهند شد. پس فرض می کنیم $m \ge n$ باشد. در نتیجه $a \ge c$. (چرا؟)

یک جدول $(a+1) \times p$ خانه ای را در نظر بگیرید که از سطر آخر آن به اندازه ی $p-b$ خانه، بریده شده است.



اکنون قصد داریم n خانه از این جدول را که دارای m خانه است، با رنگ آبی و بقیه ی خانه ها را با رنگ قرمز رنگ آمیزی کنیم. همان طور که می دانید این کار را به $\binom{m}{n}$ طریق می توان انجام داد. اگر در یک رنگ آمیزی از یک سطر جدول، x $(0 < x < p)$ خانه رنگ شده باشد، چون خود این x خانه را به $\binom{p}{x}$ طریق می توان رنگ کرد و این مقدار بر p بخش پذیر است (چرا؟) پس در این حالت، تعداد راه

های رنگ کردن کل جدول نیز بر p بخش پذیر است. به عبارت دیگر تعداد راه هایی که این جــدول مــی تواند رنگ شود به طوری که حداقل یکی از سطرهای 1 تا a آن به طور کامل آبی شده باشد و نه به طــور کامل قرمز شده باشد، بر p بخش پذیر است. در نتیجه می توان فرض کرد که هر یک از سطرهای 1 تــا a یا به طور کامل به رنگ آبی هستند یا به طور کامل به رنگ قرمز هستند. حال در این حالت چون در سطر آخر $b < p$ خانه موجو است، دقیقاً c سطر از a سطر اول و d خانه از b خانه ی سطر آخر را باید با رنگ آبی رنگ آمیزی کرد. در نتیجه این کار را به $\binom{a}{c}\binom{b}{d}$ طریق می توان انجام داد. تعداد بقیــه ی حــالات رنگ آمیزی صفحه نیز بر p بخش پذیر بود. درنتیجه باید بای مانــده ی $\binom{a}{c}\binom{b}{d}$ و $\binom{m}{n}$ بــر p یکــسان باشد. پس حکم ثابت شد.