رنگ آمیزی

در سال 1961 فیزیکدان نظری ،ام . ا . فیشر اهل انگلیس، مسألهای معروف و بسیار فکربرانگیز را حل کـرد. صورت آن مسأله این بود که به چند طریق می‌توان صفحهٔی شطرنج 8×8 را به وسیلهٔ دومینوها (قطعات مستطیل شکل 1×2) پوشاند؟

او نشان داداین کار را به $2^4 \times 901^2$ یا 12988816 راه مختلف می‌توان انجام داد. حال فرض کنید دو خانهٔ گوشه‌ای و متقابل (قطری) صفحه شطرنج را حذف کرده‌ایم، به نظر شما صفحهٔ باقیمانده را کـه از 62 مربـع واحـد تشکیل شده به چند طریق می‌توان توسط 31 دومینو پوشاند؟

این نکته را یادآور می‌شویم که پوشاندن به این معناست که هیچ خانه‌ای خالی نباشد و در ضـمن دومینوهـا روی هم نیفتاده باشند.

به نظر می‌رسد که این مسأله از مسأله‌ای که فیشر حل کرده سخت‌تر باشد، اما این طور نیست. جواب مسأله خیلی بدیهی است البته با کمک رنگ‌های خود صفحهٔ شطرنج !

جواب مسأله عدد صفر است، به بیان روشن‌تر پوشاندن صفحهٔ مذکور به وسیلهٔ 31 دومینو غیرممکن اسـت زیرا فرض کنید این صفحه را به وسیلهٔ 31 دومینو بتوان پوشاند، بدیهی است که هر دومینـوی قـرار داده شـده در صفحه یک خانهٔ سفید و یک خانهٔ سیاه را پوشانده است، به این ترتیب در صفحهٔ مذکور 31 خانهٔ سفید و 31 خانـهٔ سیاه داریم ولی این مطلب درست نیست، زیرا صفحهٔ مذکور از حذف دو خانه گوشـه‌ای و متقابـل صـفحهٔ شـطرنج حاصل شده و همان‌طور که می‌دانید این دو خانه حتماً همرنگ هستند و در نتیجه تعداد خانه‌هـای سـفید و سـیاه

صفحهٔ مذکور دو واحد با هم اختلاف دارند. پس با توجه به تناقض موجود اصلاً نمی‌توان صفحهٔ ذکر شده را به وسیلهٔ دومینوها پوشاند. اکثر مسائلی که در این قسمت مطرح می‌شوند مسائلی هستند که جواب منفی دارند و نحوهٔ اثبات آنها به وسیلهٔ ایده‌های هوشمندانهٔ رنگ‌آمیزی و زوجیت است. در مسأله‌ای که لحظاتی پیش به آن جواب دادیم از دو رنگ استفاده کردیم ولی اکثراً به بیش از دو رنگ نیاز داریم.

برای آنکه بیشتر به نحوهٔ اثبات با این ایده پی ببرید نخست باید با اصل همخوانی آشنا شوید:

اصل همخوانی $(Parity)$

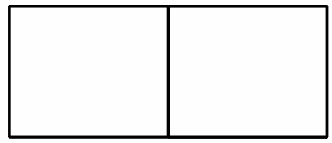
به کمک آزمون همخوانی می‌توان عدم وجود شیء یا اشیاء واجد ویژگی‌های خاص یا عدم امکان انجام اعمال خاصی را ثابت کرد. معمولا در این روش از زوج یا فرد بودن ،از مساوی بودن تعداد اشیاء موجود، از دو رنگ متفاوت یا ترکیبی از این‌ها استفاده می‌شود.

پوشش کامل یک صفحه شطرنجی به وسیله دومینوها:

فرض کنید یک صفحهٔ $n \times m$ داریم که از $n \ . \ m$ مربع متساوی تشکیل شده است. مربع‌ها در m سطر و n ستون قرار دارند. گاهی اوقات برای حل مسئله‌ای خاص لازم می‌شود که خانه‌های این شبکه را یک در میان، سفید (W) و سیاه (B) در نظر بگیریم.

منظور از یک دومینو یک مستطیل 1×2 است که در شکل زیر ملاحظه می‌کنید. مثلاً اگر بتوان یک صفحه شطرنجی را با تعدادی دومینو، بدون اینکه دومینوها روی هم قرار گیرند، به طور کامل پوشاند گوییم آن صفحه

شطرنجی دارای یک پوشش کامل بوسیله دومینوها است.



یک دومینو

مثال . نشان دهید اگر m , n فرد باشند یک صفحه شطرنجی $m \times n$ دارای یک پوشش کامل بوسیله دومینوها نیست.

حل . تعداد مربع‌های صفحهٔ شطرنجی $m \times n$ که m , n فرد هستند عددی فرد است. چون هر تعداد از دومینوها را که در نظر بگیریم تعداد زوج خواهد بود، پس نمی‌توان این صفحهٔ $m \times n$ را با دومینوها پوشاند. در اینجا از ویژگی زوجیت استفاده کردیم.

از این مسأله نتیجه می‌گیریم که برای پوشش کامل یک صفحه شطرنجی $m \times n$ بوسیله دومینوها لازم است m ضرب در n زوج باشد.

این مثال را می‌توان با روش دیگری هم بررسی کرد:

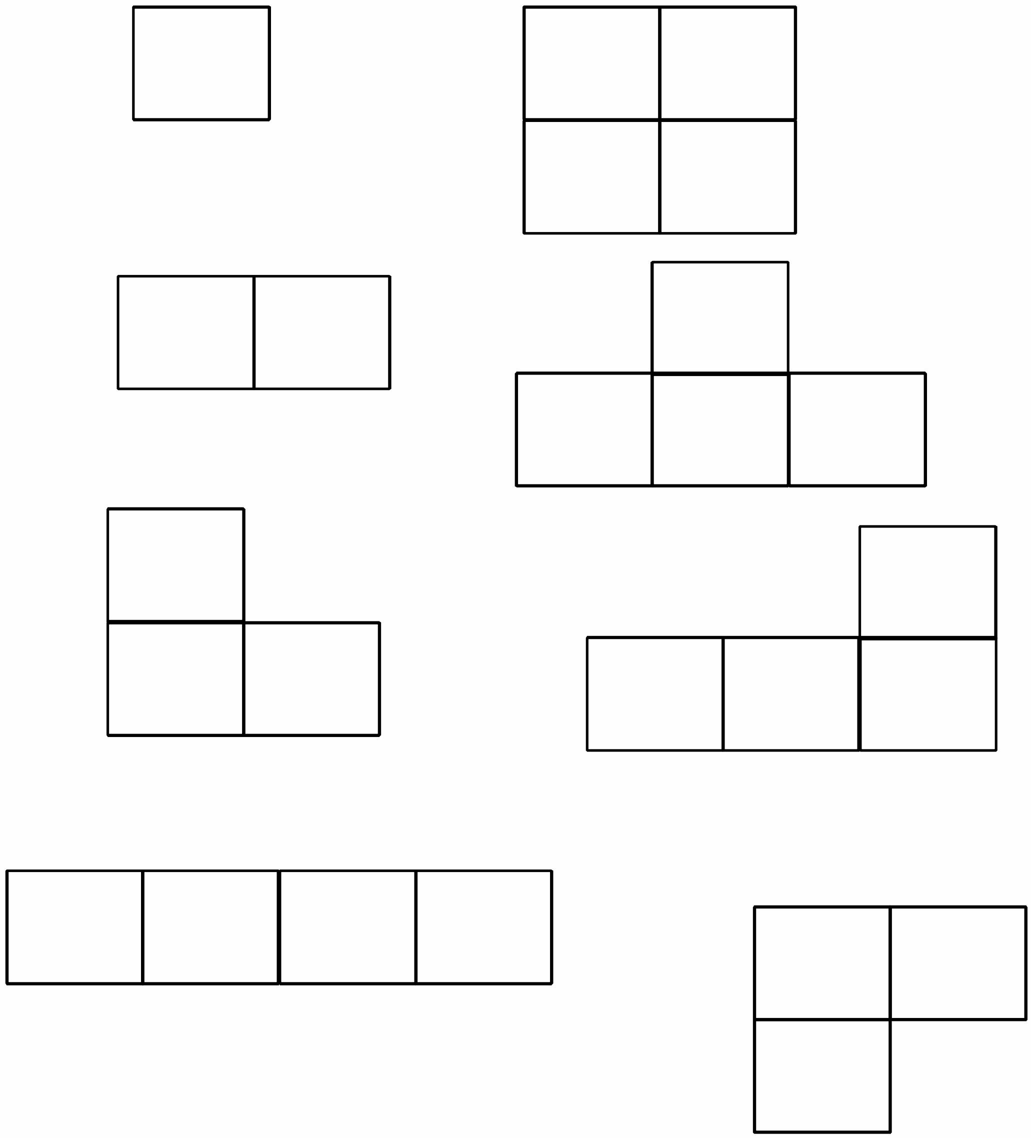
اگر خانه‌های این صفحه را یک در میان سیاه و سفید فرض کنیم برای n . m فرد تعداد خانه‌های سیاه و سفید برابر نمی‌باشد ولی هر دومینو به هر نحوی که قرار گیرد یک خانه سیاه و یک خانه سفید را خواهد پوشاند. و چون تعداد خانه‌های سفید و سیاه این صفحه با هم برابر نمی‌باشند، نمی‌توان این صفحه را به طور کامل پوشاند. در این حل از روش شطرنجی کردن استفاده کردیم.

مثال . یک صفحه مشبک 8×8 موجود است، به قسمتی که خانه‌های گوشه‌ای متقابل آن، مطـابق شـکل **1**، حذف شده‌اند. (در شکل فوق B نشان‌دهندهٔ خانه مشکی و W نشان‌دهندهٔ خانهٔ سفید می‌باشد.)

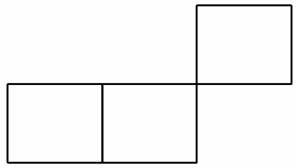
B	W	B	W	B	W	B	
W	B	W	B	W	B	W	B
B	W	B	W	B	W	B	W
W	B	W	B	W	B	W	B
B	W	B	W	B	W	B	W
W	B	W	B	W	B	W	B
B	W	B	W	B	W	B	W
	B	W	B	W	B	W	B

تعدادی دومینو در دست می‌باشد. آیا می‌توان صفحه فوق را به طور کامل با دومینوها پوشـاند. (یعنـی یـک پوشش کامل را بوسیله دومینوها داشته باشیم. به تعریف پوشش کامل توسط دومینوها توجه کنید.)

حل . این کار نشدنی است، زیرا هر دومینو یک خانه سیاه و یک خانه سفید را می‌پوشاند. بنـابراین n عـدد دومینو n عدد خانه سیاه و n عدد خانه سفید را خواهند پوشاند، یعنی از هر کدام به عدد مساوی. اما صفحهٔ مسأله ما تعداد بیشتری خانه سیاه نسبت به سفید دارد. پس نمی‌توان آن را با دومینوها پوشاند. تعمیم دومینو یا 2مربعی، چند مربعی است و قضایای ما را درباره چند مربعی‌های سادهٔ شکل زیر می‌باشد.



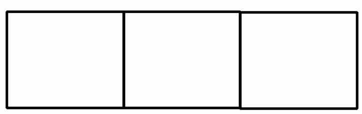
به طور دقیق یک n مربعی یک مجموعهٔ مرتبط (همبند) از n مربع واحد صفحه مشبک است، به گونه‌ای کـه اگر یک رخ در هر خانه از آن قرار بگیرد قادر باشد با تعداد متناهی حرکت بر روی صفحه به هر مربع آن برود. برای مثال شکل زیر نمی‌تواند یک سه مربعی باشد.



ابتدا 3 – مربعی ها را در نظر می‌گیریم. آشکار است که نمی‌توان صفحه 8×8 را با 3- مربعی پوشـاند، زیـرا 64 بر 3 بخش‌پذیر نیست. در عوض سعی می‌کنیم صفحه شطرنج را با 21 عدد 3- مربعی و یک عـدد یـک مربعـی بپوشانیم.

مثال . آیا پوشاندن صفحهٔ شطرنج با 21 عدد 3- مربعی راست و یک عدد 1- مربعی در گوشـهٔ سـمت چـپ بالای آن قرار داده شده ممکن است؟ اگر جواب منفی است یک پوشش برای آن بیان کنید.

سه مربعی راست:



حل . برای اثبات این مطلب صفحه را با سه رنگ c , b, a مانند شکل زیر رنگ می‌کنیم.

a	b	c	a	b	c	a	b
b	c	a	b	c	a	b	c
c	a	b	c	a	b	c	a
a	b	c	a	b	c	a	b
b	c	a	b	c	a	b	c
c	a	b	c	a	b	c	a
a	b	c	a	b	c	a	b
b	c	a	b	c	a	b	c

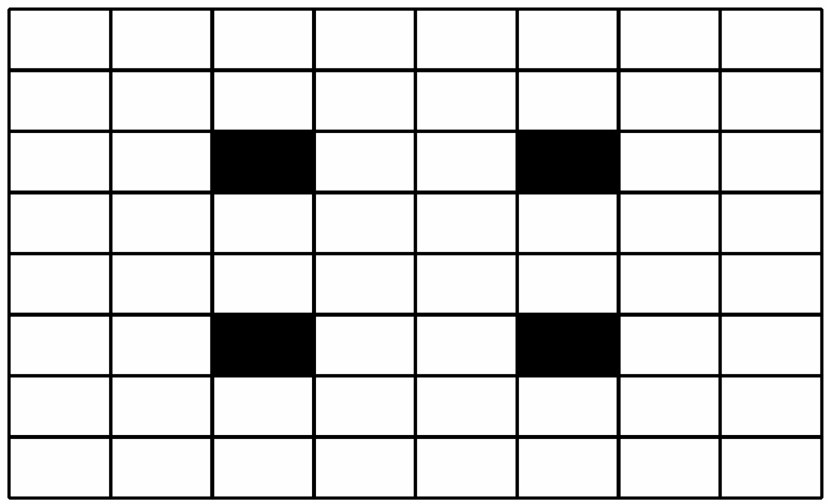
X

می‌بینید که 21 مربعی با رنگ a، 22 مربع با رنگ b و 21 مربع با رنگ c به چشم می‌خورد. هر 3- مربعی که در این صفحه قرار می‌گیرد، یک a – مربع و یک b – مربع و یک c – مربع را می‌پوشاند. پس این 3 – مربعی‌ها همیشه تعداد مساوی خانه از هر کدام از این سه رنگ را می‌پوشانند. اما گوشهٔ سمت چپ بالا یک a – مربع است و با پوشاندن آن با یک 1– مربعی، 20 عدد a - مربع باقی می‌ماند، اما 20 عدد b – مربع و 21 عدد c – مربع خواهیم داشت. این اعداد نامساوی‌اند، پس چنین پوششی غیرممکن است.

پس ما نتیجه می‌گیریم 1– مربعی باید روی یک b – مربع باشد.

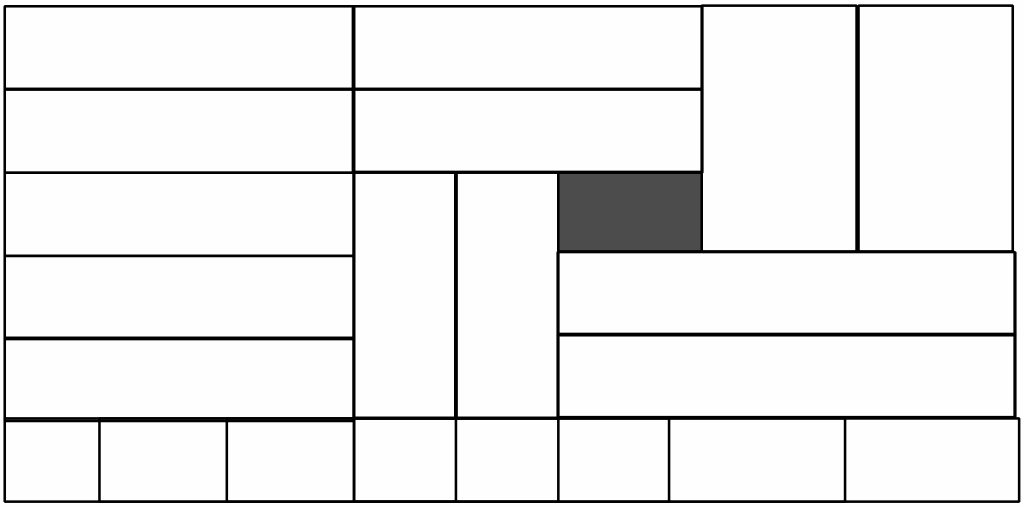
حال فرض می‌کنیم 1– مربعی روی یک b – مربع قرار گرفته باشد، برای مثال گوشه سمت چپ پایین. با در نظر گرفتن تقارن نسبت به محور x در می‌یابیم که این حالت، شبیه همان حالتی است که 1– مربعی روی گوشهٔ سمت چپ بالایی بود و چنین پوششی غیرممکن می‌باشد. در حقیقت مکان‌های ممکن برای جای‌گذاری 1– مربعی، فقط b – مربع‌های هستند که نسبت به b – مربع‌های دیگر متقارن‌اند. این مربع‌ها چهار مربع سیاه شکل زیر

هستند. شکل زیر نشان می‌دهد که اگر 1- مربعی روی یکی از این 4 مربع باشد بقیــه صــفحه را مــی‌تــوان بــا 3- مربعی‌های راست پوشاند.



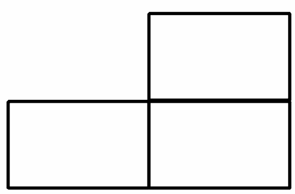
نتیجه. شرط لازم و کافی برای این که صفحه شطرنج به وسیله 21 عدد 3- مربعی راســت و یــک عــدد 1- مربعی پوشانده شود، این است که 1- مربعی در یکی از چهارخانه سیاه شکل بالا باشد.

شکل زیر یک نمونه از پوشش صفحه این مثال را نشان می‌دهد. (مستطیل‌ها مربع فرض شود)



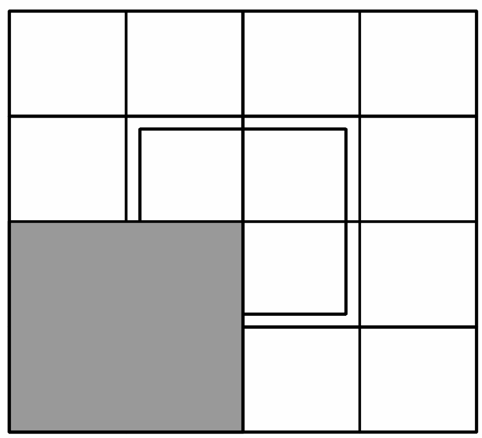
مثال . بدون توجه به این که یک، 1- مربعی در کجای صفحه شطرنج قرار گرفته، بقیه خانه‌ها را همیشه می‌توان بوسیله 21 عدد 3- مربعی قائمه پوشاند.

سه مربعی قائمه :

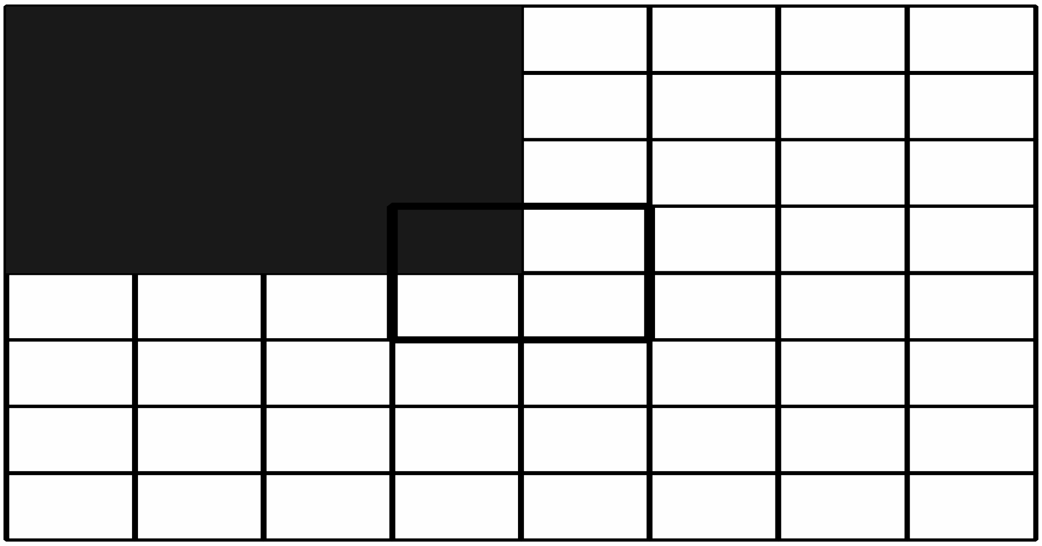


البته حکم فوق در مورد صفحه $2^n \times 2^n$ درست است و اثبات به وسیله استقرا روی n است. این مسئله برای یک صفحه 2×2 بدیهی است.

یک صفحه 4×4 را در نظر می‌گیریم. آن را به چهار مربع مطابق شکل زیر تقسیم می‌کنیم. فرض کنید 1- مربعی در یکی از چهار ربع باشد مثلاً در ربع سوم . هر یک از ربع‌ها یک صفحه 2×2 است و ما می‌توانیم 1- مربعی را در هر ربع قرار دهیم و بقیه را با 3- مربعی قائمه بپوشانیم. در ربع سوم قبلاً 1- مربعی قرار گرفته است، در سه ربع دیگر 1- مربعی‌ها را در مرکز قرار می‌دهیم. آنگاه می‌توان این 3 عدد 1- مربعی مرکزی را با یک 3- مربعی قائمه عوض کنیم. بنابراین صفحهٔ 4×4 را با یک 1- مربعی در یک مکان دلخواه و 5 تا 3- مربعی قائمه پوشانده‌ایم.



حالت 8×8 و همچنین حالت کلی به همین صورت استقرایی بحث می‌شود. در شکل زیر فرض کنیم 1- مربعی مثلاً در ربع دوم قرار بگیرد آنگاه ربع دوم خود یک مربع 4×4 است که مطابق قبل می‌توان آن را پوشش داد و 1- مربعی ربع اول و سوم و چهارم هر کدام در گوشه قرار بگیرد و با هم تشکیل سه مربعی بدهند.



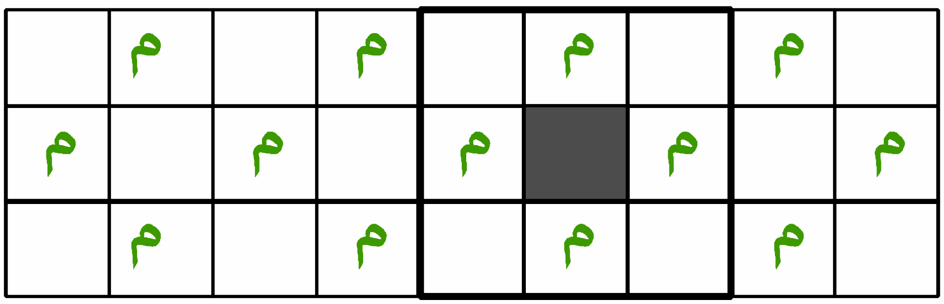
مثال . یک صفحه شطرنجی m در n را در نظر بگیرید که در آن n . m فرد است، و فرض کن ید که مربع واقع در گوشهٔ چپ و بالای آن سفید باشد. نشان دهید که اگر یک مربع سفید از این صفحه شطرنجی برداشته شود صفحه شطرنجی هرس شده دارای پوشش کامل به وسیله دومینوها است.

حل . ردیف افقی که یک مربع سفید از آن برداشته شده در نظر می‌گیریم. اگر رنگ اولین مربع از سمت چپ در این ردیف سفید باشد پس، از تعدادی فرد مربع سفید تشکیل شده که تعداد سفیدها یکی از تعداد سیاه‌ها بیشتر است. یک مربع سفید برداشته شده است. شکل زیر نشان می‌دهد که این مربع سفید از هر جا که برداشته شده باشد می‌توان بقیه ردیف را با دومینوها پوشاند.

س	م	س	م	س	م	س	م	س

ضمناً ردیف‌های بالا و پایین این ردیف دارای حاصل ضرب سطر و ستون زوج است و بنابر مثال **1** مـی‌تـوان آنها را با دومینوها پوشاند.

اما اگر مربع اول از سمت چپ مشکی باشد حداقل یک ردیف مربع در بالا و یک ردیـف مربـع در پـایین آن وجود دارد. این سه ردیف را به صورت ذیل در نظر می‌گیریم که مثلاً خانه سفید هاشورزده شده برداشته شده است.



چون خانهٔ هاشورزده شده در ردیف وسط قرار دارد همواره می‌توان یک مربع 3×3، شامل **9** مربع، که مربع وسط هاشورزده باشد در نظر گرفت (مطابق شکل بالا) واضح است که این مربع 3×3 هرس شـده را مـی‌تـوان بـا دومینوها پوشاند. ردیف‌های دو طرف این مربع 3×3 دارای ابعادی است که حاصل‌ضرب آنها زوج است و بنابر مثال **1** قابل پوشش کامل به وسیلهٔ دومینوها هستند. ضمناً ردیف‌های بالا و پایین این سه ردیف بـه شـرط وجـود دارای ابعادی با حاصل‌ضرب زوج هستند و قابل پوشش کامل به وسیلهٔ دومینوها هستند.

مثال . نشان دهید که در هر مربع وفقی 3×3 عددی که در مربع وسط قرار دارد **5** است و تعداد مربع‌هـای وفقی 3×3 مختلف را بدست آورید.

تعریف . یک مربع $n \times n$ که در آن اعداد 1 تا n^2 چنان قرار گرفته‌اند که مجموع اعداد واقع در هر سطر مساوی مجموع اعداد واقع در هر ستون و مساوی مجموع اعداد هر قطر است، یک مربع وفقی (جادویی) نامیده می‌شود.

حل .

$1 + 2 + 3 + \dots + 8 + 9 = 45$

مجموع اعداد در هر سطر و در هر ستون و روی هر قطر = $\frac{45}{3} = 15$

اعداد واقع در مربع‌ها را با حروف نمایش می‌دهیم:

x	y	z
	u	
w	m	n

$$\begin{cases} x + u + n = 15 \\ z + u + w = 15 \\ y + u + m = 15 \end{cases}$$

$(x + y + z) + 3u + (m + n + w) = 45$

$3u = 15$

$u = 5$

همچنین آزمون همخوانی نشان می‌دهد که هیچکدام از اعداد n، w، z و x نمی‌توانند فرد باشند. (علت بررسی شود، مثلاً x را فرد بگذارید آنگاه n نیز باید فرد باشد و ...)

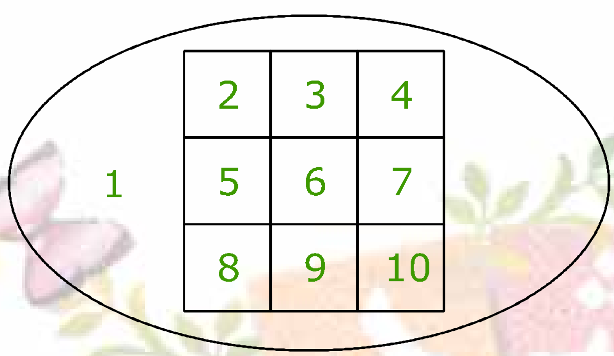
حال اگر $x = 2$ باشد دو جدول وفقی زیر حاصل می‌شود:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

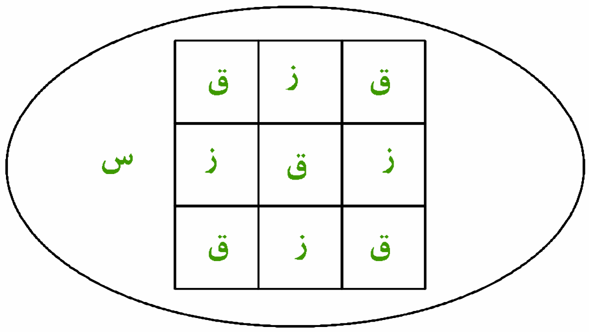
2	7	6
9	5	1
4	3	8

به همین ترتیب به ازای هر یک از مقادیر 6، 4 و 8 که به x بدهیم دو جدول وفقی حاصل می‌شود. پس جمعاً 8 مربع وفقی 3×3 وجود دارد.

مثال . نشان دهید که نقشهٔ روبرو را که از 10 ناحیه تشکیل شده می‌توان با سه رنگ (نه کمتر) چنان رنـگ کرد که نواحی مجاور با رنگ‌های متفاوت رنگ‌آمیزی شده باشند. اگر سه رنگ موجود، سبز، قرمز و زرد باشند، بـه چند طریق می‌توان این نقشه را رنگ کرد؟



حل . چون مربع‌های مجاور باید رنگ‌های متفاوت داشته باشند پس حداقل دو رنگ برای آنها نیاز داریم ضمناً ناحیه شماره یک که با مربع‌ها در تماس است باید رنگی متفاوت با این دو رنگ داشته باشد. بنابراین حداقل به سه رنگ نیاز داریم. اگر هر رنگ را با حروف اول آن نشان دهیم یک وضعیت می‌تواند چنین باشد.

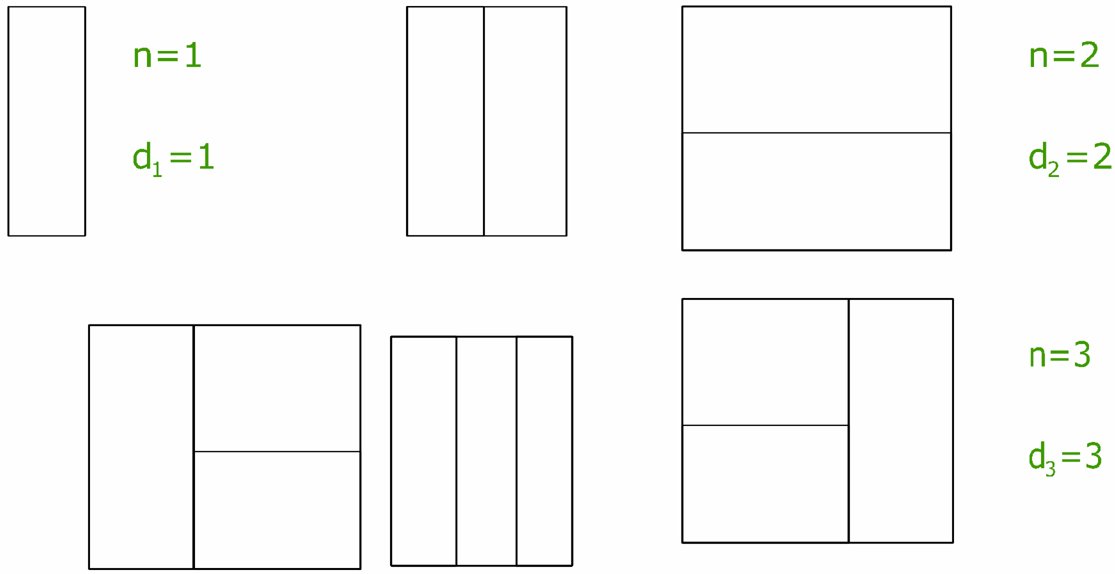


اما در همین وضعیت مربع شمارهٔ 6 نیز می‌تواند سبز باشد (دو طریق) حال اگر مربع شماره 2 زرد باشد مربع‌های زرد و قرمز جابجا می‌شوند که در این حالت هم مربع شمارهٔ 6 می‌تواند هم زرد و هم سبز باشد (دو طریق).

پس وقتی ناحیه 1 سبز باشد به چهار طریق می‌توان مربع‌ها را رنگ‌آمیزی کرد. چون سه رنگ وجود دارد، پس بنابر اصل ضرب ، جمعاً $3 \times 4 = 12$ طریق برای رنگ‌آمیزی این نقشه وجود دارد.

مثال . فرض کنید یک مستطیل $2 \times n$ داریم، می‌خواهیم این مستطیل را با دومینوها بپوشانیم. به چند طریق مستطیل $2 \times n$ با دومینوها کاملاً پوشانده می‌شود؟

حل . فرض کنید d_n تعداد طرق پوشاندن یک مستطیل $2 \times n$ با دومینوها باشد.



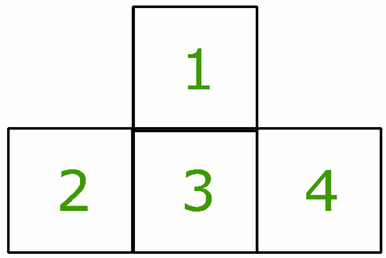
حال طریق پوشش مستطیل $n \times 2$ را به دو دسته تقسیم می‌کنیم.

1. پوشش‌هایی که در آنها آخرین دومینو به طور عمودی قرار گرفته است که تعداد حالت‌های پوشش مربوط به بقیهٔ مستطیل که $(n-1) \times 2$ می‌باشد برابر d_{n-1} است.

2. پوشش‌هایی که در آنها دومینوها به طور افقی در سمت راست قرار گرفته‌اند و بقیه مستطیل‌ها را که $(n-2) \times 2$ می‌باشد با حالت‌های مختلف می‌پوشانیم که تعدادش برابر d_{n-2} می‌باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} d_n = d_{n-1} + d_{n-2} & n \geq 3 \\ d_1 = 1 \quad d_2 = 2 \end{cases}$$

مثال . اگر یک جدول $m \times n$ را با بلوک‌هایی مانند شکل (1) پرکرده باشیم ثابت کنید $8 \mid mn$ (mn بر 8 بخش‌پذیر است)



اثبات. فرض کنید که در پرکردن جدول از k تا بلوک استفاده کرده باشیم لذا تعداد خانه‌های جدول $4k$ خواهد بود و لذا $mn = 4k$. حال اگر خانه‌های جدول را شطرنجی رنگ کنیم، چون به واسطهٔ بالا لااقل یکی از m و n زوج است تعداد خانه‌های سیاه و سفید با هم برابرند (چرا؟) از طرفی اگر یک بلوک مانند شکل (1) را در صفحه قرار دهیم خانه‌های 1،2،4 باهم، همرنگ و خانهٔ 3 از رنگ مخالف خواهد بود لذا در کل دو دسته بلوک داریم:

الف. آنهایی که سه خانه سفید و یک خانه سیاه دارند و تعداد آنها را a فرض می‌کنیم.

ب. آنهایی که سه خانه سیاه و یک خانه سفید دارند و تعداد آنها را با b فرض می‌کنیم.

بنابراین داریم که $k = a + b$ وعلاوه بر این

تعداد خانه‌های سفید جدول $= 3 \times a + b$

تعداد خانه‌های سیاه جدول $= 3 \times b + a$

بنابراین $3a+b = 3b+a$ و لذا $a = b$ پس $k = 2a$ و لذا $mn = 8a$ پس mn بر 8 بخش‌پذیر است.

مثال. a_1، a_2 ، ... ، a_n عددهایی صحیح می‌باشند و اعداد b_1، b_2، ... ، b_n یک جایگشت از آن اعداد است.

اگر n فرد باشد ثابت کنید عدد زیر زوج است:

$$(a_1 - b_1)\,(a_2 - b_2)\,\ldots\,(a_n - b_n)$$

حل . برهان خلف: اگر $(a_1-b_1)\,(a_2-b_2)\,\ldots\,(a_n-b_n)$ فرد باشد آنگاه هر یک از n عدد a_1-b_1، a_2-b_2، … ، a_n-b_n باید فرد باشد. پس چون جمع فرد تا عدد فرد، فرد می‌باشد پس باید عدد $\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)$ فرد باشد ولی $\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}b_i$. بنابراین $\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)=\mathbf{0}$ و به تناقض می‌رسیم. بنابراین عدد $(a_1-b_1)(a_2-b_2)\ldots(a_n-b_n)$ زوج است.

مثال. روی محیط دایره‌ای n عدد صفر و یک به دلخواه قرار داده‌ایم و لااقل یکی از این n عدد صفر و یکی دیگر یک می‌باشد. سپس در هر مرحله این کار را انجام می‌دهیم: بین هر دو رقم مساوی صفر می‌گذاریم و بین هر دو رقم مختلف یک قرار می‌دهیم و بعد از آن رقم‌های نخستین را پاک می‌کنیم. دوباره در مورد رقم‌های موجود همین عمل را ادامه می‌دهیم و الی آخر . اگر n فرد باشد، ثابت کنید بعد از انجام تعدادی از این اعمال نمی‌توان به n عدد صفر رسید.

حل . برهان خلف : فرض کنید پس از انجام چند عمل مورد نظر تنها عدد صفر باقی مانده باشد. اولین باری که این وضع اتفاق افتاده را در نظر بگیرید. باید در مرحله قبل تمام رقم‌های روی دایره یکسان و غیر صفر باشند. بنابراین باید تمام رقم‌های روی دایره، یک بوده باشند. بنابراین در مرحله قبل از ان نیز هر دو عدد متوالی روی دایره مختلف بوده‌اند. بنابراین در این مرحله باید تعداد رقم‌های صفر و یک برابر باشد و تعداد کل آنها زوج باشد ولی تعداد کل اعداد فرد می‌باشد پس به تناقض می‌رسیم.

مثال . در یک مهمانی n نفر حضور دارند و هر نفر با تعدادی از مهمان‌ها دست داده است ثابت کنید تعداد افرادی که با تعداد فردی دست داده‌اند زوج است.

حل . در هر دست دادن دو نفر با هم دست داده‌اند پس تعداد کل دست‌دادن‌ها زوج است. حال اگر دست‌دادن کسانی که با تعداد زوجی دست داده‌اند را از آن کم کنیم نتیجه می‌شود تعداد دست‌دادن‌های کسانی که، تعداد فردی دست داده‌اند زوج است پس چون مجموع چند عدد فرد زوج شده است باید تعداد آنها زوج باشد. و حکم ثابت می‌شود.

مثال . موشی با خوردن مکعب‌های $1 \times 1 \times 1$ در یک قطعه پنیر $3 \times 3 \times 3$ راه خود را باز می‌کند و می‌خواهد با تونل‌زدن در این مکعب تمام 27 مکعب $1 \times 1 \times 1$ را بخورد. اگر موش کارش را از یک گوشه مکعب شروع کند و هیچ‌گاه به مکعبی که قبلاً خورده است نرود آیا موش می‌تواند کارش را در مرکز مکعب تمام کند. (موش پس از خوردن یک مکعب می‌تواند یکی از مکعب‌های مجاور را بخورد.)

حل . در حل این گونه مسائل به سراغ رنگ‌آمیزی می‌رویم. در اینجا اگر 27 مکعب $1 \times 1 \times 1$ را یکی در میان سیاه و سفید کنید (یعنی مکعب را مشابه صفحه شطرنج ولی در حالت سه‌بعدی رنگ کنید) موش باید از یک خانه شروع کند و از هر خانه سیاه به یک خانه سفید برود و برعکس در ضمن در انتها باید در خانه سیاه (رنگ خانه مکعب وسطی) برود ولی چون تعداد خانه‌های سفید از خانه‌های سیاه بیشتر است این کار امکان ندارد. (توجه کنید که رنگ خانه‌های گوشه‌ای سفید است.)

مثال . یک صفحه شطرنجی $n \times n$ را که در آن n عددی زوج است در نظر بگیرید و در هرخانه آن عددی صحیح قرار دارد. دو عمل زیر را روی این صفحه تعریف می‌کنیم:

- به تمام خانه‌های یک سطر یا یک ستون یا یکی از دو قطر عدد دلخواه k را می‌افزاییم (k عددی صحیح است و می‌تواند منفی هم باشد).

- **یکی از خانه‌های غیر حاشیه‌ای را انتخاب می‌کنیم و مجموع مربعات اعداد روی هشت همسایه آن را به آن می‌افزاییم و سپس تمام اعداد روی این هشت خانه را به صفر تبدیل می کنیم.**

حال جدولی را در نظر بگیرید که در آن عدد خانه‌ای که در سطر i ام و ستون j ام قرار دارد برابر $i + j$ است با این استثناء که در خانه $(1 , 1)$، عدد 1 قرار دارد. ثابت کنید که با هیچ دنباله‌ای از اعمال بالا نمی‌توان تمامی اعداد جدول را صفر کرد.

حل . ثابت می‌کنیم همواره مجموع اعداد داخل خانه‌های جدول فرد می‌باشد و بنابراین نمی‌توان به جدولی رسید که تمام اعداد آن صفر باشد:

$$S=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j)-1=\sum_{i=1}^{n}\left(n\,i+\frac{n(n+1)}{2}\right)-1$$

$$=\frac{n^2(n+1)}{2}+\frac{n^2(n+1)}{2}-1$$

پس در ابتدا مجموع درایه‌های جدول فرد می‌باشد.

حال فرض کنید مجموع درایه‌های جدول در ابتدا S بوده و بعد از یکی از دو حرکت S' شده است ثابت می‌کنیم باقی مانده S و S' بر دو مساوی است. زیرا اگر حرکت ما حرکت اول باشد چون n زوج است داریم

$$S'=S+kn \Rightarrow S'\overset{2}{\equiv}S$$

حال فرض کنید حرکت دوم روی درایه a_9 انجام شده است و همسایه‌های a_9 را a_1 تا a_8 بگیرید (شکل زیر)، در این صورت:

a_1	a_2	a_3
a_8	a_9	a_4
a_7	a_6	a_5

$$S' = S - \left(a_1 + a_2 + \cdots + a_8\right) + \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_8^2\right)$$

$$= S - \sum_{i=1}^{8} a_i \left(a_i - 1\right)$$

و می‌دانیم $a_i\left(a_i - 1\right)$ بر 2 بخش‌پذیر است پس $S \overset{2}{\equiv} S'$.

مثال . الف. در جدول 4×4 علامت‌های « + » و « − » را طبق شکل زیر قرار داده‌ایم. می‌توانیم علامت همه خانه‌هایی را که در یک سطر یا یک ستون یا به روی خط راستی موازی یک قطر (و در حالت خاص یکی از خانه‌های گوشه‌ای) قرار دارند به طور همزمان عوض کنیم ثابت کنید اگر این عمل را هر چند بار انجام دهیم به جدولی نمی‌رسیم که همه علامت‌های آن مثبت باشد.

نکتهٔ اصلی. در هر بار تعداد منفی‌ها از نظر زوج و فرد بودن تغییر نمی‌کند.

+	-	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

ب. در همهٔ خانه‌های صفحه شطرنجی 8×8 علامت مثبت گذاشته‌ایم به استثنای یکی از خانه‌ها (و البته به جز خانه‌های گوشه‌ای که در آن علامت منفی قرار داده‌ایم) در هر عمل می‌توانیم به طور همزمان علامت همه خانه‌های یک سطر یا یک ستون یا خانه‌های روی یک خط راست موازی قطر را تغییر دهیم (و در حالت خاص هر کدام از خانه‌های گوشه‌ای را). ثابت کنید اگر هر چند بار به این ترتیب علامت‌ها را تغییر دهیم به جدولی نمی‌رسیم که همه علامت‌های آن مثبت باشد.

حل . الف. هر سطر یا ستون یا قطر مربع تعداد زوجی از 8 خانه علامت‌دار در شکل روبرو را قطع می‌کند بنابراین تعداد منفی‌های واقع در این خانه‌ها را نمی‌توان از زوج به فرد یا از فرد به زوج تغییر داد.

	×	×	
×			×
×			×
	×	×	

ب. از مربع 8×8 می‌توان یک مربع 4×4 را طوری جدا کرد که علامت منفی در آن شبیه حالت (الف) قــرار گرفته باشد یعنی در یکی از خانه‌های علامت‌دار قرار بگیرد و در نتیجه چنین کاری ممکن نیست.

مثال . الف. در رأس A_1 از دوازده ضلعی منتظم $A_1A_2 \ldots A_{12}$ علامت منفی و در بقیهٔ رئــوس علامــت مثبــت گذاشته‌ایم. در هر عمل به طور هم‌زمان علامت شش رأس مجاور را عوض می‌کنیم. ثابت کنید نمی‌تــوان بــا تکــرار چندبار این عمل، به جایی رسید که علامت همه رأس‌ها مثبت باشد.

ب. همین حکم را برای حالتی که به جای شش رأس متوالی علامت‌های چهــار رأس متــوالی چنــد ضــلعی را عوض کنیم ثابت کنید.

ج. همین حکم را برای موردی ثابت کنید که تصمیم بگیریم به طور همزمان علامت‌های سه رأس متوالی چند ضلعی را عوض کنیم.

حل.الف. 12 رأس دوازده ضلعی را به 6 جفت رأس زیر تقسیم می‌کنیم:

$A_6\,A_{12}, \ldots, A_2\,A_8\,, A_1\,A_7$

در هر عمل در هر زوج تنها یکی از رأس‌ها تغییر علامت می‌دهد. بنابراین در جفت‌های $A_6\,A_{12}\,, \ldots\,, A_2\,A_8$ بعد از عمل $(2k-1)$ ام علامت‌های مختلف و بعد از عمل $(2k)$ ام علامت‌های یکسان وجود خواهد داشــت ولــی در جفت $A_1\,A_7$ ،همه چیز برعکس است. به این ترتیب حالتی پیش نمی‌آید که همه علامت‌ها مثبت باشد.

ب. چهار گروه و در هر گروه سه رأس را در نظر می‌گیریم $A_1\,A_5\,A_9$ ، $A_2\,A_6\,A_{10}$ ، $A_3\,A_7\,A_{11}$ ، $A_4\,A_8\,A_{12}$ و مثل حالت قبل استدلال می‌کنیم (فرد یا زوج بودن تعداد منفی‌های هر گروه در هر عمل تغییر می‌کند).

ج. رأس‌ها را به سه گروه $A_1\,A_4\,A_7\,A_{10}$ و $A_2\,A_5\,A_8\,A_{11}$ و $A_3\,A_6\,A_9\,A_{12}$ تقسیم کرده و به همان روش

استدلال می‌کنیم.

مثال . n سکه در یک ردیف در کنار هم قرار دارند. بعضی از این سکه‌ها به رو و بعضی به پشت قرار گرفته‌اند. در هر حرکت می‌توانیم یکی از این n سکه را انتخاب کنیم و آن سکه و سکه‌های مجاور سمت راست و سمت چپ آن را همزمان برگردانیم (از رو به پشت و از پشت به رو). توجه کنید که در صورتی که سکه انتخاب شده یکی از دو سکه انتهایی باشد ، دو سکه و در غیر این صورت سه سکه برگردانده می‌شود.

الف. ثابت کنید اگر $n = 3k$ یا $n = 3k + 1$ باشد به هر ترتیبی که سکه‌ها قرار گرفته باشند با استفاده از چنین حرکت‌هایی می‌توانیم همه سکه‌ها را به رو برگردانیم.

ب. ثابت کنید که برای هر n که به صورت $3k + 2$ باشد وضعیت اولیه‌ای وجود دارد که برای آن با استفاده از این حرکت‌ها نمی‌توان این کار را انجام داد (یعنی همه سکه‌ها را به رو برگرداند).

حل . الف. ابتدا ثابت می‌کنیم که برای هر n می‌توان با اعمال بالا سکه را به حالتی تبدیل کرد که همه $n - 1$ سکه اول (از چپ) به رو و سکه آخر به پشت باشد یا همهٔ n سکه به رو باشند.

برای این کار کافی است اولین سکه‌ای که به پشت است در نظر بگیرید و سکه سمت راست آن را انتخاب کنید و عمل برگردان را انجام دهید. به این ترتیب تمام سکه‌ها به جز سکه آخر به رو برگردانده می‌شوند.

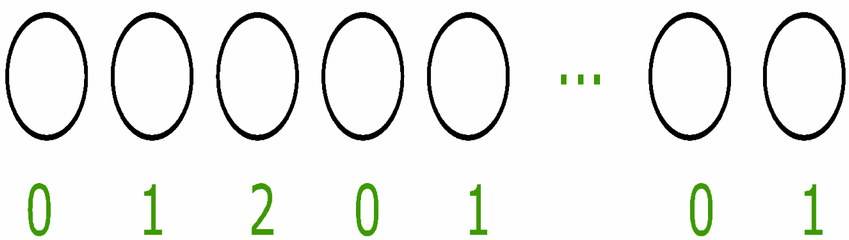
با استقراء روی k برای $n = 3k$ حکم را ثابت می‌کنیم. به این ترتیب که آرایشی را که در بالا گفته شده را بدون اینکه سکه آخر را انتخاب کنیم به حالتی که تمام سکه‌ها به رو برگردانده شده‌اند تبدیل می‌کنیم.

برای $n = 3$ که واضح است ابتدا سکه دوم و سپس سکه اول را انتخاب می‌کنیم. برای $n = 3k + 3$ ابتدا سکه $3k + 2$ و سپس سکه $3k + 1$ را برمی‌گردانیم. حال سه سکه آخر به رو هستند و فقط سکه $3k$ ام به پشت

است. حال طبق فرض استقرا این سکه‌ها را برمی‌گردانیم و چون هیچ‌گاه سکه $3k$ ام را انتخاب نمی‌کنیم پس سه سکه آخری به پشت باقی می‌مانند و حکم به ازای $n = 3k$ اثبات می‌شود.

برای $n = 3k + 1$ ابتدا سکه $3k + 1$ ام را برمی‌گردانیم و سپس $3k$ سکه باقی می‌ماند که سکه $3k$ ام به پشت و بقیه به رو می‌باشند. حال مانند قسمت قبل عمل می‌کنیم.

ب. در این قسمت حالتی که تمام سکه‌ها به جز سکه آخری به پشت هستند جواب مسأله است، زیرا اگر به سکه‌ها به تناوب شماره **0** و **1** و **2** بدهیم (مطابق شکل)، در این صورت هربار که یک سکه دارای شماره صفر برگردد یک سکه شماره یک نیز برمی‌گردد و بالعکس ولی تعداد دفعاتی که سکه‌های با شماره یک برمی‌گردند باید فرد باشد و تعداد دفعاتی که سکه‌های با شماره صفر برمی‌گردند باید زوج باشد پس این کار امکان ندارد.



مثال. تعداد ماتریس‌های $m \times n$ با درایه‌های **1** و **1-** را پیدا کنید که حاصل‌ضرب عناصر هر سطر آن برابر با **1-** و حاصل‌ضرب عناصر هر ستون آن نیز برابر **1-** شود. ادعای خود را ثابت کنید.

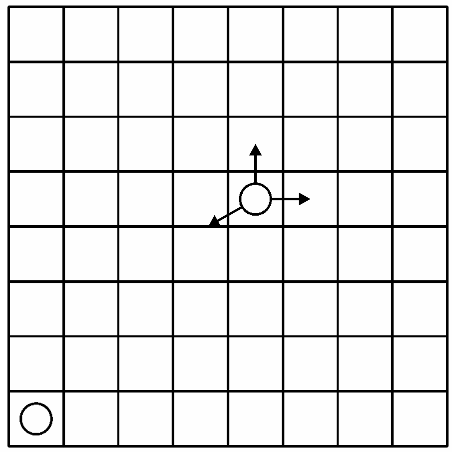
حل. اولاً باید $m \overset{2}{\equiv} n$ زیرا در غیر این صورت هیچ ماتریسی با مشخصات بالا وجود ندارد، چون حاصل‌ضرب

درایه‌های ماتریس مورد نظر از یک طرف $(-1)^m$ و از طرف دیگر $(-1)^n$ می‌باشد. حال ثابت می‌کنیم اگر $m \overset{2}{\equiv} n$ آنگاه تعداد این ماتریس‌ها $2^{(m-1)(n-1)}$ می‌باشد. برای این کار نشان می‌دهیم که یک تناظر یک به یک بین این ماتریس‌ها و ماتریس‌های $(m-1) \times (n-1)$ که با درایه‌های 1 و -1 پر شده‌اند وجود دراد.

به ازای هر ماتریس $(m-1) \times (n-1)$ یک ماتریس با این خصوصیت وجود دارد زیرا می‌توان درایه‌های سطر m ام را به گونه‌ای انتخاب کرد که حاصل‌ضرب درایه‌های هر $(n-1)$ ستون -1 شود و به طور مشابه درایه‌های ستون n ام را می‌توان به گونه‌ای انتخاب کرد که حاصل‌ضرب درایه‌های هر $(m-1)$ سطر آن -1 شود.

اگر M حاصل‌ضرب درایه‌های ماتریس اول و A و B به ترتیب حاصل‌ضرب درایه‌های فعلی سطر mام و ستون nام باشند داریم $M = \frac{(-1)^{m-1}}{B} = \frac{(-1)^{n-1}}{A}$ و چون $m \overset{2}{\equiv} n$ بنابراین $A = B$ و بنابراین درایه (m , n) را می‌توان به گونه‌ای انتخاب کرد که حاصل‌ضرب ستون و سطر آخر -1 شود. توجه کنید که این ماتریس به طور یکتا از روی ماتریس اول به دست می‌آید. به طور مشابه به ازای هر کدام از این ماتریس‌ها از حذف سطر و ستون آخر یک ماتریس $(m-1) \times (n-1)$ به دست می‌آید و حکم اثبات می‌شود.

مثال . یک مهره در صفحه 8×8 را می‌توان یک خانه به طرف بالا، یک خانه به طرف راست و یا یک خانه در جهت قطری به سمت چپ و پایین حرکت داد (مطابق شکل). مهره را در پایین‌ترین خانه گوشه چپ صفحه قرار داده‌ایم. آیا این مهره می‌تواند از تمام خانه‌های صفحه عبور کند به نحوی که در هر خانه درست یک بار قرار گیرد؟



حل . خیر. این بار صفحه را به سه رنگ مطابق شکل، رنگ‌آمیزی می‌کنیم. (می‌توانید بگویید در حالت کلـی در این رنگ‌آمیزی رنگ خانه $(i\ ,\ j)$ چیست؟)

2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2

چون باید مهره از یک خانه با رنگ صفر شروع کند مجموعاً 64 خانه را طی می‌کند پس باید 22 خانه به رنگ

1 داشته باشیم زیرا این مهره به هر صورت که حرکت کند رنگ خانه‌هایی که طی می‌کند به تناوب صـفر، یـک، دو خواهد بود. (چرا؟) ولی به راحتی دیده می‌شود که در رنگ‌آمیزی ما، 21 خانه به رنگ صفر وجود دارد پس این کـار ممکن نمی‌باشد.

مثال . یک دایره را به n قطاع تقسیم کرده‌ایم و در هر قطاع یک مهره گذاشته‌ایم در هر حرکت دو مهره را به قطاع‌های مجاور منتقل می‌کنیم مشروط به اینکه یکی از دو انتقال در جهت حرکت عقربه‌های ساعت و دیگـری در خلاف آن باشد. در صورتی که n زوج باشد آیا می‌توان با تکرار این عمل همه مهره‌ها را در یک قطاع گردآورد؟

حل . به هر یک از این n قطاع به ترتیب یک شماره از صفر تا $n-1$ را نسبت می‌دهیم. حال به هـر آرایـش عدد k را نسبت می‌دهیم که برابر است با مجموع شمارهٔ خانه‌های این n مهره.

در یک انتقال یک واحد به k (به هنگ n) اضافه و در انتقال دیگر یک واحد (به هنگ n) کم می‌شود. بنابراین باقیماندهٔ k بر n در هر حرکت ثابت می‌ماند از طرف دیگر در شروع کار k برابر است با مجموع اعداد صفر تا $n-1$ و اگر n زوج باشند این عدد بر n بخش‌پذیر نیست. (چرا؟) ولی اگر همه مهره‌ها در نهایت در یک قطـاع باشـند بایـد باقیمانده k بر n برابر صفر گردد و این خلاف این است که در هر حرکت باقیمانده k بر n تغییری نمی‌کند. (منظور از k به هنگ n باقی‌مانده k بر n است .)

مثال. هر یک از اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاعی را به k بخش برابر تقسیم کـرده‌ایـم. از هـر نقطـه تقـسیم خط‌های راستی موازی ضلع‌ها کشیده‌ایم. به این ترتیب مثلث مفروض به k^2 مثلث کوچکتر تقسیم می‌شـود. دنبالـه مثلث‌هایی را یک «زنجیر» می‌نامیم که در آن هیچ مثلثی دوبار تکرار نشده باشد و در ضمن هر مثلث با مثلث قبلی خود در یک ضلع مشترک باشد حداکثر تعداد مثلث‌های یک زنجیر چقدر است؟

حل . مثلث‌ها را به گونه‌ای سیاه و سفید می‌کنیم که هیچ دو مثلث مجاوری هم رنگ نباشند. تعداد مثلث‌های سیاه $\frac{1}{2}\left(k^2+k\right)$ و تعداد مثلث‌های سفید $\frac{1}{2}\left(k^2-k\right)$ است و در هر زنجیره، رنگ مثلث‌ها باید یک در میان سیاه و سفید باشد بنابراین یک زنجیره حداکثر شامل k^2-k+1 مثلث است. (یک زنجیره با این طول به ازای هر k بیابید.)