

## اصل نوردایی

در اینجا یکی از استراتژی های سطح بالا در حل مسایل را توضیح خواهیم داد. مسایل این قسمت در نگاه اول مشکل به نظر می رسند اما با حل چند مثال، روش کلی حل مسایل را به دست خواهیم آورد و خواهید دید که گاهی اوقات مسایلی که صورت آنها بسیار پیچیده است، چه باطن ساده ای دارند. در حقیقت روش حل مساله را تنها با حل مساله می توان آموخت. بنابراین توصیه می کنیم پس از مشاهده هر سوال ابتدا سعی کنید خودتان مسایل آن را حل کنید و سپس حل کتاب را مشاهده کنید.

استراتژی اول حل مساله جستجوی قواعد ثابت است. در حل مساله های این فصل این قاعده را رعایت کنید:

### اگر یک تکرار مشاهده کردید به دنبال یک قاعده ثابت بگردید.

در مسایل این فصل در هر مساله یک حالت اولیه (فضای ابتدایی) وجود دارد و عملی نیز تعریف شده که در هر گام انجام می شود و معمولاً یک حالت به عنوان هدف نهایی معرفی شده و سوال این است که: آیا می توان به این هدف نهایی رسید یا خیر؟ بنابراین مسایل این فصل 2 حالت دارند:

1. مسایلی که رسیدن به حالت هدف آنها ممکن است: این دسته از مسایل (به نظر من)

جالب تر هستند در این مسایل معمولاً به دنبال یک تابع اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی

برای هر گام می گردیم. پس از یافتن این تابع تقریباً 80٪ مساله حل شده است. پس از

یافتن این تابع معمولاً مسایل به 2 روش حل می شوند.

**الف.** از آنجا که تابع یکنواست، در گام های مساله به حالت تکراری برنمی خوریم چون بایستی در این صورت رشد تابع در مواقعی به صورت عکس ادامه یافته باشد. اگر تعداد حالت های (فضای) مساله محدود باشد چون در هر گام به یک حالت جدید می رسیم پس این عمل نمی تواند بینهایت بار انجام شود و بالاخره این عمل متوقف می شود و معمولاً توقف عمل معادل حل مساله است.

**ب.** تابع یکنواست و قدر مطلق رشد آن از مقدار  $e$  بیشتر است حالا اگر تابع مورد نظر از مقدار مشخصی بیشتر (یا کمتر) نشود در این صورت این عمل متوقف خواهد شد. در اینجا ذکر یک نکته لازم است. مقدار  $e$  چرا لازم است: فرض کنید هدف ما عدد 2 است و حالت ابتدا عدد 1 است و در گام اول  $\frac{1}{2}$  در گام دوم  $\frac{1}{4}$  در گام سوم  $\frac{1}{8}$  و ... به عدد 1 اضافه شود مشاهده می کنیم که همیشه می توان به عدد موجود عددی اضافه کرد و هیچ وقت هم این عدد به 2 نمی رسد. اینجا لزوم وجود  $e$  اثبات می شود.

**2.** مسایلی که رسیدن به حالت هدف در آنها ممکن نیست: در این مسایل معمولاً رابطه ثابتی می یابیم که با هر عمل همچنان برقرار باقی می ماند اگر این رابطه برای حالت نهایی (حالت هدف) برقرار نباشد، چون تنها به حالت های ممکن است برسیم که این رابطه را ارضا می کنند، بنابراین به حالت نهایی نمی رسیم (به این روش استفاده از اصل هم خوانی هم می گویند).



**مثال 1.** از نقطه  $s = (a, b)$  با فرض  $0 < b < a$  در صفحه شروع می کنیم و دنباله نقاط

$(x_n, y_n)$  را بر طبق قانون زیر می سازیم:

$$x_0 = a, y_0 = b, x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$$

ثابت کنید با بزرگ شدن  $n$ ،  $x_n$  و  $y_n$  به سمت یک حد مشخص میل می کنند.

**حل.** در اینجا یافتن یک رابطه ثابت کار ساده ای است. از رابطه  $x_{n+1} y_{n+1} = x_n y_n$  (که بسیار

واضح است) برای تمام مقادیر  $n$  می توان نتیجه گرفت  $x_n y_n = ab$ . در ابتدا داریم  $y_0 < x_0$ . این رابطه

نیز به عنوان یک رابطه ثابت باقی می ماند. در حقیقت  $x_{n+1}$  واسطه حسابی  $x_n$ ،  $y_n$  و  $y_{n+1}$  واسطه

هندسی  $x_n$  و  $y_n$  است: واسطه حسابی 2 عدد تنها وقتی با واسطه هندسی آنها مساوی است که 2 عدد

با هم مساوی باشند و در غیر این صورت واسطه حسابی بزرگ تر است. چون  $y_0 < x_0$  است، به ازای

تمام مقادیر  $n$  رابطه  $y_n < x_n$  برقرار می ماند. پس برای تمام مقادیر  $n$  رابطه

$$0 < x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{x_n + y_n} \cdot \frac{x_n - y_n}{2} < \frac{x_n - y_n}{2}$$

برقرار است. بنابراین  $x_n$  و  $y_n$  به ازای مقادیر بزرگ  $n$  هر دو به سمت یک عدد که ما آن را  $x$  می

نامیم میل می کنند. در رابطه  $x^2 = ab$  یا  $x = \sqrt{ab}$  بایستی صدق کند.

این مثالی از یافتن رابطه ثابت در مساله بود. توجه کنید که یافتن این روابط حل مساله نیست

بلکه صرفاً ابزاری برای حل مساله است. اینکه چگونه از این روابط برای حل مساله استفاده نماییم نیز

کاملاً ابتکاری است.

**مثال 2.** فرض کنید  $n$  یک عدد طبیعی فرد است. در ابتدا تمام اعداد  $1, 2, 3, \dots, 2n$  روی تخته

سیاه نوشته شده اند. در هر مرحله 2 عدد دلخواه  $a$  و  $b$  را از بین اعداد روی تخته سیاه پاک می کنیم و

به جای آنها عدد  $|a - b|$  را می نویسیم. ثابت کنید عددی که در نهایت باقی خواهد ماند فرد است.

**حل.** فرض کنید  $S$  برابر مجموع اعدادی باشد که در هر مرحله روی تخته سیاه نوشته شده اند در

ابتدا  $S = \frac{2n(2n+1)}{2}$  است که یک عدد فرد است. فرض کنید در یک مرحله 2 عدد  $a$  و  $b$  را انتخاب

کنیم. بدون کاسته شدن از کلیت مساله می توانیم فرض کنیم  $a \leq b$  باشد در این صورت  $a$  و  $b$  خط می

خورند و به جای آنها  $b - a$  قرار می گیرد که در نتیجه مقدار  $S$  به اندازه  $2a$  کاهش می یابد بنابراین زوج

یا فرد بودن  $S$  ثابت می ماند. در ابتدا  $S$  عددی فرد است بنابراین عددی که در نهایت باقی می ماند نیز

فرد است.

**مثال 3.** یک دایره را به 6 بخش تقسیم کرده ایم و در جهت خلاف حرکت عقربه های ساعت

عددهای  $0, 0, 0, 1, 0$  و  $1$  در این بخش ها نوشته ایم. شما می توانید در هر مرحله به دو عدد که در 2

بخش مجاور قرار دارند یک واحد اضافه نمایید. آیا ممکن است به حالتی برسید که تمام اعداد نوشته

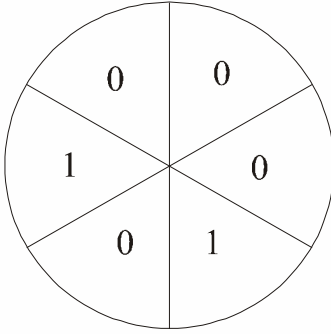
شده با هم برابر باشند؟

**حل.** برای حل مساله فرض می کنیم  $A$  مجموع اعداد بخش های اول و سوم و پنجم و  $B$  مجموع

اعداد بخش های دوم و چهارم و ششم باشد روشن است که رابطه  $A - B = 2$  همیشه برقرار است چون

در هر گام به هر یک از  $A$  و  $B$  یک واحد اضافه می شود. بنابراین امکان ندارد به حالتی برسیم که شش

عدد با هم مساوی باشند چون در آن حالت  $A - B$  برابر 0 خواهد بود.



**مثال 4.** در یک پالمان هر نماینده حداکثر 3 مخالف دارد. ثابت کنید، این نمایندگان را می توان

در 2 خانه قرار داد طوری که هر نماینده در خانه خود حداکثر 1 مخالف داشته باشد.

**حل.** در ابتدا نمایندگان را به صورت دلخواه در 2 خانه قرار می دهیم. فرض کنید  $H$  مجموع تعداد

مخالفان افراد در خانه های خود باشد. فرض کنید  $A$  در خانه خود بیش از 1 مخالف داشته باشد بنابراین

$A$  حداکثر یک مخالف در خانه دیگر دارد و می تواند به خانه دیگر برود. اگر خانه  $A$  عوض شود مقدار  $H$

کم خواهد شد. (مقدار  $H$  حداقل 2 واحد کمتر می شود) از آنجا که  $H$  عددی طبیعی و محدود است این

عمل نمی تواند همیشه ادامه یابد و بالاخره متوقف خواهد شد. یعنی بعد از چند مرحله مقدار  $H$  دیگر

کاهش نمی یابد و در نتیجه در آنجا ما به نتیجه مطلوب رسیده ایم.

**ملاحظه.** در اینجا از یک ایده جدید استفاده نمودیم. ما یک تابع اکیداً نزولی یافتیم که در هر

مرحله مقدار آن کاهش می یابد و همیشه مقدار آن عددی صحیح و غیرمنفی است از آنجا که دنباله

نامتناهی اکیداً نزولی از اعداد صحیح و غیرمنفی وجود ندارد، این دنباله بایستی یک دنباله متناهی

باشد.

**مثال 5.** فرض کنید هر 4 عدد  $a, b, c, d$  با هم مساوی نباشند از دنباله چهارتایی  $(a, b, c, d)$

شروع می کنیم از این دنباله چهارتایی جدید  $(a-b, b-c, c-d, d-a)$  را می سازیم و همین عمل را با دنباله جدید ادامه می دهیم. ثابت کنید کوچکترین عدد دنباله، می تواند از لحاظ قدرمطلق، به هر اندازه بزرگ شود.

**حل.** فرض کنید به ازای هر  $n, r_n = (a_n, b_n, c_n, d_n)$  چهارتایی باشد که در مرحله  $n$ ام به آن

رسیده ایم بنابراین برای  $n > 0$  داریم:  $a_n + b_n + c_n + d_n = 0$  این یک رابطه ثابت است که شاید زیاد به ما کمک نکند ولی اگر ثابت کنیم دنباله  $a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2$  کران بالا ندارد در این صورت مسأله حل خواهد شد. می بینیم که رابطه زیر برقرار است.

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2 + d_{n+1}^2 &= (a_n - b_n)^2 + (b_n - c_n)^2 + (c_n - d_n)^2 + (d_n - a_n)^2 \\ &= 2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) - 2a_n b_n - 2b_n c_n - 2c_n d_n - 2d_n a_n \end{aligned} \quad (1)$$

حالا از رابطه  $0 = a_n + b_n + c_n + d_n$  استفاده می کنیم:

$$0 = (a_n + b_n + c_n + d_n)^2 = (a_n + c_n)^2 + (b_n + d_n)^2 + 2a_n b_n + 2b_n c_n + 2c_n d_n + 2d_n a_n$$

طرفین تساوی فوق و رابطه (1) را با هم جمع می کنیم تا رابطه زیر به دست آید:

$$a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2 + d_{n+1}^2 = 2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) + (a_n + c_n)^2 + (b_n + d_n)^2$$

در نتیجه داریم:

$$a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2 + d_{n+1}^2 \geq 2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2)$$

و در نتیجه به ازای هر  $n$  داریم:

$$a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2 \geq 2^{n-1} (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2)$$

بنابراین مجموع توان دوم اعداد هر چهارتایی در هر مرحله در حال افزایش است و چون این

مجموع همیشه عدد طبیعی است مقدار آن هر اندازه که بخواهیم بزرگ می شود. حالا نتیجه می گیریم

بزرگترین عدد هر چهارتایی از لحاظ قدرمطلق، هر اندازه که بخواهیم می تواند زیاد شود. اما چون

مجموع اعداد 4تایی ها بعد از مرحله اول 0 است نتیجه می گیریم هم قدرمطلق کوچکترین عدد منفی و

هم قدرمطلق بزرگترین عدد مثبت در حال افزایش است.

**ملاحظه.** اگر در این مسأله  $r_n = (a_n, b_n, c_n, d_n)$  را نقطه ای در صفحه 4 بعدی فرض کنیم.

متوجه می شویم که در هر مرحله، فاصله نقطه جدید از مبدأ در حال افزایش است بنابراین فاصله از مبدأ

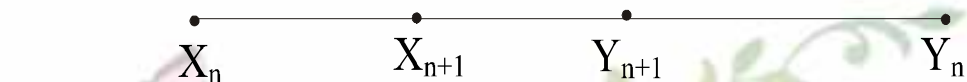
تابع مهمی است که زمان هایی که با دنباله ای از نقاط سروکار داریم ممکن است مفید باشد.

**مثال 6.** از نقطه  $(x_0, y_0)$  با فرض  $0 < x_0 < y_0$  شروع می کنیم و در هر مرحله  $y_{n+1}, x_{n+1}$  را

به صورت زیر از  $y_n, x_n$  به دست می آوریم.

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \quad \text{و} \quad y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1} y_{n+1}}$$

با استفاده از شکل 1 و نامساوی واسطه های حسابی و هندسی برای هر  $n$  نشان دهید:



شکل (1)

$$x_n < y_n \Rightarrow x_{n+1} < y_{n+1} \quad \text{و} \quad y_{n+1} - x_{n+1} < \frac{y_n - x_n}{4}$$

همچنین ثابت کنید  $x$  حد دنباله  $x_n$  و  $y$  حد دنباله  $y_n$  با هم مساوی اند.

**حل.** در اینجا نیز اصل عدم تغییر به کمک ما می آید. به تغییرات  $\frac{x_n}{y_n}$  و  $x_n - y_n$  وقتی از مرحله  $n$  به مرحله  $n+1$  می رویم، توجه کنید:

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{x_{n+1}}{\sqrt{x_{n+1}y_n}} = \sqrt{\frac{x_{n+1}}{y_n}} = \sqrt{1 + \frac{x_n}{y_n}} \quad (1)$$

این رابطه ما را به یاد رابطه بین کسینوس نصف یک زاویه با کسینوس خود آن زاویه می اندازد:

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}$$

از آنجا که رابطه  $0 < \frac{x_n}{y_n} < 1$  همیشه برقرار است می توانیم فرض کنیم  $\frac{x_n}{y_n} = \cos a_n$ . بنابراین

رابطه (1) به صورت زیر درمی آید:

$$\cos a_{n+1} = \cos \frac{a_n}{2} \Rightarrow a_n = \frac{a_0}{2^n} \Rightarrow 2^n a_n = a_0 \quad (2)$$

بنابراین می توان نتیجه گرفت:

$$2^n \text{Arc cos } \frac{x_n}{y_n} = \text{Arc cos } \frac{x_0}{y_0}$$

که همواره برای هر  $n$  برقرار است.

برای اینکه از ریشه دوم پرهیز کنیم به جای  $x_n - y_n$ ،  $x_n^2 - y_n^2$  را بررسی می کنیم.

داریم:



$$y_{n+1}^2 - x_{n+1}^2 = \frac{y_n^2 - x_n^2}{4}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{y_{n+1}^2 - x_{n+1}^2} = \sqrt{y_n^2 - x_n^2}$$

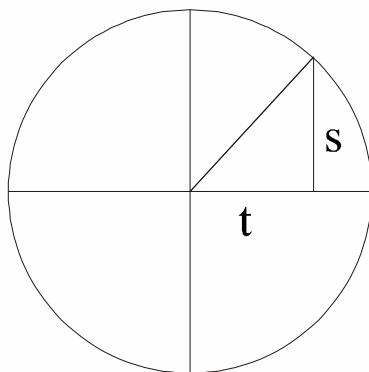
که با تکرار چند باره آن به دست می آید:

$$2^n \sqrt{y_n^2 - x_n^2} = \sqrt{y_0^2 - x_0^2} \quad (3)$$

که این نیز رابطه مفید دیگری است.

$$s = \sqrt{1-t^2} \quad \text{و} \quad \arccos(t) = \arcsin(s)$$

از شکل 2 و روابط (2) و (3) می توان نتیجه گرفت:



شکل (2)

$$\arccos \frac{x_0}{y_0} = 2^n \arccos \frac{x_n}{y_n} = 2 \arcsin \frac{\sqrt{y_n^2 - x_n^2}}{y_n} = 2^n \arcsin \frac{\sqrt{y_0^2 - x_0^2}}{2^n y_0}$$

حد سمت راست وقتی  $n$  به سمت بینهایت میل کند برابر  $\frac{\sqrt{y_0^2 + x_0^2}}{y}$  است و در نتیجه رابطه زیر

به دست می آید.

$$x = y = \frac{\sqrt{y_0^2 - x_0^2}}{\arccos\left(\frac{x_0}{y_0}\right)}$$

ما این مسأله را به سختی می توانستیم بدون اصل عدم تغییر حل نماییم اسن مسأله یقیناً مسأله

ای دشوار در برابر استاندارد رقابت های ریاضی می باشد.

**مثال 7.** هر یک از اعداد  $a_1, a_2, \dots, a_n, \mathbf{K}$  برابر 1 یا -1 هستند و داریم:

$$S = a_1 a_2 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4 a_5 + \dots + a_n a_1 a_2 a_3 = 0$$

ثابت کنید  $n \mid 4$ .

**حل.** این یک مسأله در نظریه اعداد است برای حل مسأله باز هم از اصل عدم همخوانی استفاده

کنیم. یکی از  $a_i$  ها را به  $-a_i$  تغییر می دهیم و تغییرات  $S$  را بررسی می کنیم می بینیم که علامت 4

جمله متوالی که شامل  $a_i$  است تغییر خواهد کرد. اگر هر 4 جمله قبلاً هم علامت بودند،  $S$  به اندازه  $\pm 8$

تغییر می کند اگر 2 تا مثبت و 2 تا منفی بودند،  $S$  تغییری نمی کند و اگر 3 تا هم علامت بودند و یکی از

علامت مخالف،  $S$  به اندازه  $\pm 4$  تغییر می کند. مشاهده می کنیم که باقیمانده  $S$  در تقسیم بر 4 نیز ثابت

باقی می ماند. حالا تغییرات را طوری انجام می دهیم که تمام  $a_i$  ها برابر 1 شود مشخص است که در این

حالت  $S = n$  خواهد شد ولی باقیمانده آن به 4 تغییر نکرده است یعنی باقیمانده  $n$  بر 4 برابر 0 است.

**مثال 8.**  $2n$  سفیر به یک مهمانی دعوت شده اند که هر کدام حداکثر  $n-1$  دشمن در بین

سفرای دیگر دارند. ثابت کنید این  $2n$  سفیر را می توان دور یک میزگرد طوری نشانند که دو طرف هر

سفیر، سفیرانی قرار گرفته باشند که با او دشمن نباشند.

**حل.** این مسأله دارای حلی با استفاده از نظریه گراف می باشد، اما اینجا ما سعی می کنیم با

استفاده از پایان پذیری آن را حل کنیم: در ابتدا افراد را به صورت تصادفی دور میزگرد می نشانیم فرض

کنید  $H$  تعداد زوج های دشمن که کنار هم هستند، باشد. باید روشی ارائه دهیم که در هر مرحله باعث

کاهش مقدار  $H$  گردد. فرض کنید  $A$  و  $B$  دو سفیر مجاور و دشمن باشند، به طوری که  $B$  سمت راست  $A$

باشد (شکل 3) ثابت می کنیم افراد مجاور  $A'$  و  $B'$  وجود دارد به طوری که  $B'$  سمت راست  $A'$  باشد و

$(A, A')$  و  $(B, B')$  زوج های دوست باشند. می دانیم  $A$  حداقل  $n$  دوست در بین سفرای کشورها دارد. دور

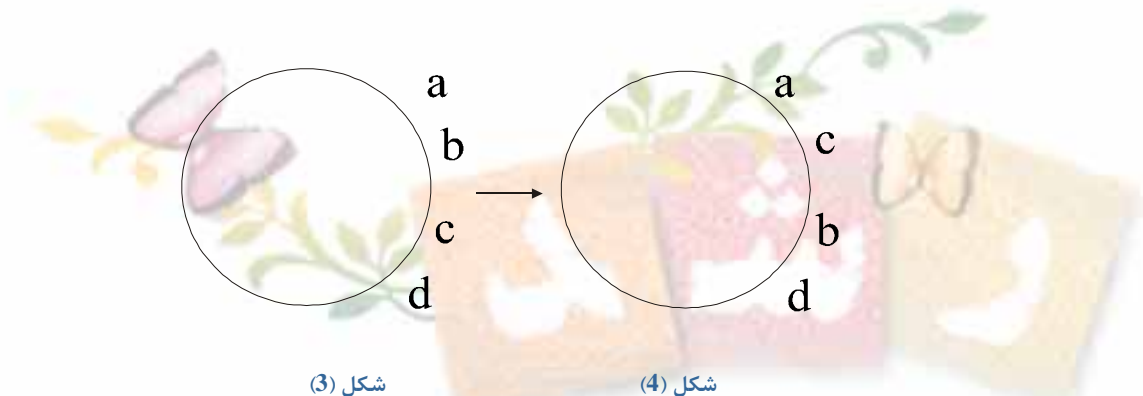
میزگرد  $n$  نفر نشسته اند که هر کدام دست راست یکی از این  $n$  نفر قرار دارند. اگر همه این افراد با  $B$

دشمن باشند  $B$  بیشتر از  $n-1$  دشمن خواهد داشت بنابراین سفیر  $B'$  وجود دارد که سمت راست سفیر

$A'$  قرار گرفته باشد به طوری که  $(B, B')$  و  $(A, A')$  با هم دوست باشند.

مطابق شکل 3 آرایش جدیدی از افراد با  $H$  کمتر می توان ساخت. دقت کنید در شکل جدید،

قرار گرفتن افراد بین  $B$  و  $A'$  در جهت خلاف قرار گرفتن قبلی است.



شکل (3)

شکل (4)

مسئله فوق یک مسئله نظریه گراف است و معادل این مسئله است که اگر در یک گراف ساده با  $n$

رأس درجه هر رأس بزرگتر یا مساوی  $\frac{n}{2}$  باشد آنگاه آن گراف دارای دور هامیلتونی است. روش حل

دیگر این مسئله از طریق استقراء قهقرايي روی تعداد یال های گراف است. حالت پایه استقراء حالتی است که گراف ساده و کامل داریم.

**مثال 9.** به هر رأس یک پنج ضلعی عدد صحیح  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ) را نسبت می دهیم به طوری که

در هر مرحله 3 عدد  $x, y, z$  که به ترتیب اعداد نسبت داده شده به 3 رأس متوالی پنج

$$s = \sum_{i=1}^{i=5} x_i > 0$$

ضلعی هستند را انتخاب می کنیم به طوری که  $y < 0$  باشد و سه تایی  $(x, y, z)$  را تبدیل به سه تایی

$(x + y, -y, z + y)$  می کنیم و این کار را تا زمانی که عدد کوچکتر از صفری وجود داشته باشد ادامه

می دهیم. آیا این عمل پایان می یابد یا خیر؟ (این مسئله مشکلترین مسئله المپیاد بین المللی ریاضی

سال 1986 بود).

**حل.** این عمل همیشه پایان پذیر است. کلید اثبات (همانند مثال های 4 و 8) یافتن تابع صحیح

$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  است به طوری که مقدار  $f$  در هر مرحله که 3 عدد را عوض می کنیم کاهش یابد. از 11

دانش آموزی که این مسئله را حل کردند یکی تابعی مشابه تابع زیر معرفی کرد:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum_{i=1}^5 (x_i - x_{i+2})^2, x_6 = x_1, x_7 = x_2$$

فرض کنید  $y = x_4 < 0$ . در این صورت اگر  $f_{new}$  مقدار  $f$  پس از انجام یک تغییر به مرکزیت

$x_4$  باشد و  $f_{old}$  مقدار  $f$  قبل از تغییر باشد داریم:

$$f_{new} - f_{old} = 2sx_4$$

و از آنجا که  $s > 0$  مقدار  $f_{new} - f_{old}$  منفی است یعنی تابع  $f$  در هر مرحله در حال کاهش است. بنابراین اگر این عمل پایان ناپذیر باشد ما یک دنباله نامتناهی اکیداً نزولی از اعداد صحیح و غیرمنفی یافته ایم که غیرممکن است.

«برنالد چازل» از دانشگاه پرینستون این سوال را مطرح کرد: چند مرحله لازم است تا الگوریتم متوقف شود. او دنباله نامتناهی  $S$  از مجموع‌هایی را در نظر گرفت که به صورت  $S(i, j) = x_i + L + x_{j-1}$  تعریف می‌شوند. ( $\mathbf{K}, x_7 = x_2, x_6 = x_1, j > i, 1 \leq i \leq 5$ ). وقتی به عنوان مثال  $x_4$  به  $x_4 -$  (همان گونه که در بالا مثال گفته شد) تبدیل می‌شود تنها جمله منفی که بین اعداد  $S$  مثبت می‌شود  $S(4,5) = x_4$  است که تغییر می‌کند و به  $x_4 -$  (همان گونه که در مثال بالا گفته شد) تبدیل می‌شود تنها جمله منفی که بین اعداد  $S$  که منفی بود مثبت می‌شود. از آنجا که  $s > 0$  است،  $S$  شامل تعداد متناهی عدد منفی می‌باشد بنابراین تعداد مراحل لازم برای توقف برابر تعداد اعداد منفی داخل  $S$  می‌باشد همچنین دیدیم که نیازی به صحیح بودن مقدار  $x_i$ ‌ها هم نیست.

**ملاحظه.** جالب است که یک فرمول را با کامپیوتر بیابیم که این فرمول برای هر ورودی  $(a, b, c, d, e)$  از اعداد تعداد مراحل لازم تا زمان توقف را بیابد. یافتن این فرمول برای حالت‌های که  $s = 1$  است چندان مشکل نیست برای مثال برای ورودی  $(n, n, 1 - 4n, n, n)$  تعداد مراحل  $20n - 10$  است.

**مثال 10.** کاهش مربع‌ها (یک تحقیق تجربی): از چهارتایی  $S = (a, b, c, d)$  از اعداد صحیح و مثبت شروع می‌کنیم و چهارتایی جدید  $S_1 = T(S) = (|a - b|, |b - c|, |c - d|, |d - a|)$  را از  $S$

به دست می آوریم به همین ترتیب دنباله نامتناهی ... و  $S_1, S_2 = T(S_1), S_3 = T(S_2)$  را می سازیم آیا همیشه در این دنباله ها به چهارتایی های  $(0,0,0,0)$  می رسیم.

**حل .** برای اینکه جواب را حدس بزنیم چند مثال شروع می کنیم:

$$(0,3,10,13) \rightarrow (3,7,3,13) \rightarrow (4,4,10,10)$$

$$\rightarrow (0,6,0,6) \rightarrow (6,6,6,6)$$

$$\rightarrow (0,0,0,0)$$

$$(8,7,3,107) \rightarrow (9,14,104,99) \rightarrow (0,90,5,90)$$

$$\rightarrow (85,85,85,85) \rightarrow (0,0,0,0)$$

$$(91,108,95,294) \rightarrow (17,13,99,203) \rightarrow (4,8,6,104,186)$$

$$\rightarrow (82,18,82,182) \rightarrow (64,64,100,100)$$

$$\rightarrow (0,36,0,36) \rightarrow (36,36,36,36)$$

$$\rightarrow (0,0,0,0)$$

مشاهدات .

(1). اگر  $\max S$  را بزرگترین عضو 4 تایی  $S$  تعریف کنیم در این صورت:

$$\max S_{i+1} \leq \max S_i$$

و همچنین تا زمانی که  $\max S_i > 0$  داریم:

$$\max S_{i+4} < \max S_i$$

اگر این نامساوی ها اثبات شود، مسأله ثابت شده است.

(2)  $S$  و  $tS$  (4 تایی که از ضرب اعداد  $S$  در عدد  $t$  به دست می آید) دارای یک طول عمر می باشند.

(3) بعد از 4 مرحله هر 4 عدد به دست آمده حتماً زوج خواهند بود. برای اثبات این نکته می توانیم محاسبات را به پیمانه 2 انجام دهیم و تمام حالت ها را آزمایش کنیم به خاطر اینکه تغییر دوری جای 4 تایی ها تأثیری در استدلال ندارد تنها چند حالت ساده را لازم است آزمایش کنیم:

$$0001 \rightarrow 0011 \rightarrow 0101 \rightarrow 1111 \rightarrow 0000$$

و

$$1110 \rightarrow 0011 \rightarrow$$

**ملاحظه.** در اثبات مشاهده (3) از تقارن دوری استفاده کردیم ما همیشه بایستی بتوانیم در صورت امکان از این ایده استفاده کنیم. البته این بخش به این موضوع اختصاص ندارد.

مشاهده (3) اثبات شد. پس حداکثر بعد از 4 مرحله ما با 4 عدد زوج سروکار داریم و حداکثر بعد از 8 مرحله هر جمله مضرب  $2^2$  خواهد بود و ... و بعد از  $4k$  مرحله هر عدد دنباله مضرب  $2^k$  خواهد بود. اگر  $k$  را طوری تعیین کنیم که  $\max S < 2^k$  باشد در این صورت چون بیشترین عدد  $S$  در چهار تایی های بعدی بزرگتر نمی شود بنابراین پس از  $4k$  مرحله بایستی هر 4 عدد برابر 0 باشد (چون بعد از  $4k$  مرحله تمام اعداد مضرب  $2^k$  هستند ولی همگی از  $2^k$  کوچکترند بنابراین باید 0 باشند). اگر مشاهده اول هم اثبات شود می توان روش دیگری برای حل مسأله به دست آورد. برای اثبات مشاهده اول می توان از اصل اکسترمال استفاده کرد انتخاب عنصر ماگزیمال! که در بخش 3 به آن می پردازیم.

نتایج . الف. اگر از اعداد حقیقی شروع کنیم برای مثال:

$\sqrt{2}$	$p$	$\sqrt{3}$	$e$
$p - \sqrt{2}$	$p - \sqrt{3}$	$e - \sqrt{3}$	$e - \sqrt{2}$
$\sqrt{3} - \sqrt{2}$	$p - e$	$\sqrt{3} - \sqrt{2}$	$p - e$
$p - e - \sqrt{3} + \sqrt{2}$	$p - e\sqrt{3} + \sqrt{2}$	$p - 2\sqrt{3} + \sqrt{2}$	$p - e\sqrt{3} + \sqrt{2}$
0	0	0	0

می توان نتایج خاصی به دست آورد. که هنوز اثبات نشده است. آیا همیشه به  $(0,0,0,0)$  می

رسیم؟ فرض کنید  $S = (1, t, t^2, t^3)$  داریم:

$$T(S) = [(t-1), t(t-1), (t-1)t^2, (t-1)(t^2+t+1)]$$

اگر  $t$  به گونه ای اختیار شود که  $t^3 = t^2 + t + 1$  شود. این عمل هرگز پایان نمی یابد (برای مثال

اگر  $t = 1/8392867552\mathbf{K}$ ) همچنین این مقدار  $t$  با صرف نظر از تغییراتی به صورت  $f(t) = at + b$

منحصر به فرد خواهد بود.

ب. از  $S = (a_0, a_1, \mathbf{K}, a_{n-1})$  شروع می کنیم و فرض می کنیم  $a_i$  ها اعداد صحیح غیرمنفی

هستند. برای  $n = 2$  پس از 1 مرحله به  $(0,0)$  می رسیم. برای  $n = 3$  داریم:

$$001 \rightarrow 101 \rightarrow 110 \rightarrow 011$$

همچنین برای  $n = 5$  داریم:

$$00011 \rightarrow 00101 \rightarrow 01111 \rightarrow 10001 \rightarrow 10010$$

$$\rightarrow 10111 \rightarrow 11000 \rightarrow 01001 \rightarrow 11011$$

$$\rightarrow 01100 \rightarrow 10100 \rightarrow 11101 \rightarrow 00110 \rightarrow 01010$$

$$\rightarrow 11110 \rightarrow 00011$$

که یک حلقه به طول 15 می باشد.



1. طول حلقه ها را برای  $n = 6$  (یا  $n = 8$ ) با دنباله  $000001000011$  بیابید.

2. نشان دهید برای  $n = 8$  الگوریتم با ورودی  $00000011$  متوقف می شود.

3. نشان دهید برای  $n = 2^r$  همیشه به دنباله  $(0,0,0,\mathbf{K},0)$  می رسیم و برای  $n \neq 2^r$

همیشه به دنباله ای از حلقه ها تکرار شونده می رسیم که شامل تنها 2 عدد می باشند

که یکی 0 و دیگری غیرصفر است برای اثبات این قضیه می توان از اثبات مشاهده 2

استفاده کرد.

4. فرض کنیم  $c(n)$  حداکثر طول حلقه تکرار شونده برای  $n \neq 2^r$  باشد ثابت کنید

$$c(2n) = 2c(n)$$

5. ثابت کنید که برای  $n$  های فرد دنباله  $(0,0,\mathbf{K},0,1,1)$  از همان ابتدا روی حلقه تکرار

شونده است.

6. جبری کردن. به دنباله  $(a_0, a_1, \mathbf{K}, a_{n-1})$  چند جمله ای

$$r(x) = a_{n-1} + a_{n-2}x + \dots + a_0x^{n-1}$$

را اختصاص می دهیم که در آن  $x^n = 1$

یکی از ریشه های  $n$ ام عدد 1 است در بحث اعداد مختلط ثابت می شود عدد 1،  $n$  تا

ریشه  $n$ ام متمایز دارد) در این صورت چند جمله ای  $(1+x)r(x)$  به دنباله  $T(S)$

تعلق دارد. آیا می توانید از این جبری کردن استفاده نمایید.

7. جدول زیر توسط کامپیوتر تولید شده است با استفاده از جدول زیر حدس هایی برای

$c(n)$  بزنید و آنها را اثبات کنید.

$n$	3	15	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
$c_n$	3	15	7	63	341	819	15	255	9709	63	2047	25575

$n$	27	29	31	33	35	37	39	41	43
$c_n$	13797	47405	31	1023	4095	3233097	4095	41943	5461

شبکه رشد - شبکه ملی مدارس ایران



Olympiad.roshd.ir