فرمول بیز:

بیز فرمولی دارد برای محاسبه: قطعه قطعه یک احتمال.

یعنی چه؟

فرض کنید پیشامد E به چند پیشامد افراز شده باشد. آنگاه می‌توان برای محاسبه احتمال پیشامد E، اگر ساده‌تر است احتمال اشتراک E با هر یک از آن قطعه‌ها را جدا جدا حساب و در انتها با هم جمع کنیم.

برای محاسبه احتمال اشتراک E و هر قطعه هم از فرمول

$$P(E \cap F) = P(E|F)P(F)$$

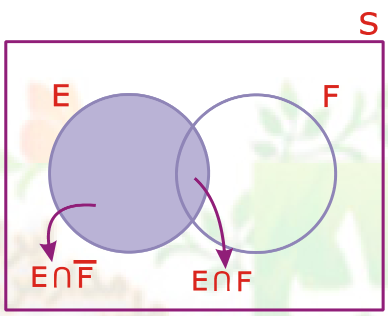
کمک بگیریم.

مثلاً برای افراز E به دو قطعه فرض کنید پیشامد دیگری به نام F وجود دارد که دو قطعه افراز E به ترتیب $E \cap F, E \cap \bar{F}$ باشد.

آنگاه داریم:

$$P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap \bar{F})$$

$$P(E) = \frac{P(E|F)P(F) + P(E|\bar{F})P(\bar{F})}{P(E|F)P(F) + P(E|\bar{F})[1 - P(F)]}$$



معادله بالا بیانگر آن است که احتمال پیشامد E برابر است با حاصلضرب احتمالی شرطی E در صورتی که می‌دانیم F رخ داده است و احتمال شرطی E با فرض این که F رخ نداده است. هر احتمال شرطی به اندازه احتمال پیشامدی که به آن مشروط شده است وزن داده شده است. این فرمول بسیار سودمند است زیرا با استفاده از آن می‌توانیم احتمال یک پیشامد را ابتدا با مشروط کردن آن بر رخ دادن یا رخ ندادن یک پیشامد تعیین کنیم. یعنی موارد زیادی وجود دارد که محاسبه مستقیم احتمال یک پیشامد دشوار است، در صورتی که اگر بدانیم پیشامد معین دومی رخ داده یا نداده است محاسبه آن ساده است، با چند مثال آن را توضیح می‌دهیم.

مثال.

شرکت بیمه‌ای بر این باور است که افراد را می‌توان به دو گروه تقسیم کرد: گروهی که مستعد تصادف‌اند و گروهی که نیستند. آمارهای این شرکت نشان می‌دهد که یک فرد مستعد تصادف، با احتمال ۰/۴ تصادفی در زمان معینی در ظرف یک دوره یک ساله معین خواهد داشت، در صورتی که این احتمال برای یک فرد فاقد این استعداد به ۰/۲ کاهش می‌یابد. اگر فرض کنیم که ۳۰ درصد جامعه‌ای مستعد تصادف است، احتمال این که بیمه‌گذار جدیدی در ظرف مدت یک سال از قرارداد بیمه، یک تصادف داشته باشد چقدر است؟

حل.

احتمال مطلوب را ابتدا با شرط این که آیا بیمه‌گذار مستعد تصادف است یا خیر، به دست می‌آوریم. فرض کنید A_1 پیشامدی را که بیمه‌گذار در ظرف یک سال از خرید یک تصادف داشته باشد و A پیشامدی را که بیمه‌گذار مستعد تصادف است نشان دهد، در این صورت احتمال مطلوب عبارت است از:

$$
\begin{aligned}
P(A_1) &= P(A_1|A)P(A) + P(A_1|A^c)P(A^c) \\
&= (.4)(.3) + (.2)(.7) = .26
\end{aligned}
$$

مثال.

فرض کنید بیمه‌گذار جدیدی در ظرف یک سال از خرید بیمه یک تصادف دارد. احتمال این که این فرد مستعد تصادف باشد چقدر است؟

حل.

$$\begin{aligned} P\left(A\left|A_l\right.\right) &= \frac{P\left(AA_l\right)}{P\left(A_l\right)} \\ &= \frac{P\left(A\right)P\left(A_l\left|A\right.\right)}{P\left(A_l\right)} \\ &= \frac{(.3)(.4)}{26} = \frac{6}{13} \end{aligned}$$

مثال.

در پاسخ به سؤالی در آزمونی چند گزینه‌ای یک دانشجو یا سؤال را می‌داند، یا آن را حدس می‌زند. فرض کنید p احتمال باشد که این دانشجو پاسخ را می‌داند و $l-p$ احتمالی که پاسخ را حدس می‌زند. فرض کنید دانشجویی که پاسخ را حدس می‌زند با احتمال $\frac{1}{m}$ که m تعداد گزینه‌هاست، پاسخ درست بدهد. احتمال شرطی این که دانشجویی پاسخ سؤال را بداند در صورتی که می‌دانیم به آن پاسخ درست داده است چقدر است؟

حل.

فرض کنید C و K به ترتیب پیشامدی را که این دانشجو به سؤال پاسخ درست دهد و پیشامدی را که وی واقعاً پاسخ را می‌داند است نمایش دهند. اکنون

$$
\begin{aligned}
P\left(K \middle| C\right) &= \frac{P\left(KC\right)}{P\left(C\right)} \\
&= \frac{P\left(C \middle| K\right) P\left(K\right)}{P\left(C \middle| K\right) P\left(K\right) + P\left(C \middle| K^{c}\right) P\left(K^{c}\right)} \\
&= \frac{p}{p + \left(1/m\right)\left(1-p\right)} \\
&= \frac{mp}{1+\left(m-1\right)p}
\end{aligned}
$$

بنابراین، برای مثال اگر $m = ۵$ و $P = \frac{1}{2}$، احتمال این که دانشجویی پاسخ سؤالی را که به آن پاسخ درست داده می‌دانسته است برابر $\frac{5}{6}$ است.

یک مثال تاریخی که کاربرد مفهوم احتمال شرطی و استقلال و قاعده بیز را نشان می‌دهد (از کتاب نخستین درس احتمال)

در مسابقه قهرمانی جهانی بریج که درم اه می ۱۹۶۵ در بوئنوس آیرس برگزار شد، انجمن بریج معروف بریتانیایی مربوط به ترنس ریس و بوریس چاپیرو متهم به تقلب با استفاده از علامات انگشتان شدن که می‌توانست تعداد قلبها در دست بازیکنان را نشان دهد. ریس و چاپیرو این اتهام را رد کردند و سرانجام یک جلسه دادرسی به وسیله اتحادیه بریج بریتانیا تشکیل شد. این جلسه به شکل فرآیندی رسمی یا یک دادستان و تیم دفاع بود، که هر دو قدرت احضار و بازپرسی و روبروسازی از شاهدان را داشتند. در طی این فرآیندها، دادیار چند دست بازی خاصی را که توسط ریس و چاپیر و بازی شد، بررسی و اعلام کرد که بازی آنها در این چند دست با فرضی که آنها در به دست آوردن اطلاعات نارا از خال قلب مقصرند سازگار است. در این مرحله، وکیل مدافع، خاطرنشان می‌سازد که بازی آنها درا ین دستها با بازی استاندارد آنها کاملاً سازگارست. با وجود این، شاکی مدعی است مادامی که بازی آنها با فرض گناهکاری سازگار است، این امر بایستی مدرکی موید این فرض محسوب شود. نظر شما درباره این استدلال شاکیان چیست؟

حل.

این مسئله اساساً مسئله‌ای است که تعیین می‌کند چگونه دخالت یک مدرک جدید (در مثال بالا، این چند دست‌بازی) احتمال فرض خاصی را تحت تأثیر قرار می‌دهد. اکنون، اگر فرض کنیم H فرض خاصی را نشان می‌دهد (مانند گناهکاری ریس و چاپیرو) و E مدرک جدید را، آنگاه

$$\begin{aligned} P\left(H \mid E\right) &= \frac{P\left(H \cap E\right)}{P\left(E\right)} \\ &= \frac{P\left(E \mid H\right) P\left(H\right)}{P\left(E \mid H\right) P\left(H\right) + P\left(E \mid H^{c}\right)\left[1-P\left(H\right)\right]} \end{aligned}$$

که در آن $P(H)$ ارزیابی ما از دست فرض قبل از دخالت این مدرک جدید است. این مدرک جدید این فرض را در صورتی که آن را محتمل‌تر سازد، تقویت می‌کند یعنی هرگاه $P\left(H \mid E\right) \geq P\left(H\right)$. از معادله بالا، هرگاه

$$P\left(E \mid H\right) \geq P\left(E \mid H\right) P\left(H\right) + P\left(E \mid H^{c}\right)\left[1-P\left(H\right)\right]$$

یا هم‌ارز با آن، هرگاه

$$P\left(E \mid H\right) \geq P\left(E \mid H^{c}\right)$$

به بیان دیگر، هر مدرک جدیدی را می‌توان تقویت کرد یعنی فرض خاصی در نظر گرفت. هرگاه وقوع آن وقتی این فرض درست است بیشتر از وقتی باشد که فرض نادرست است. در حقیقت، احتمال جدید این فرض به احتمال اولیه آن و نسبت این احتمالهای شرطی بستگی دارد، زیرا

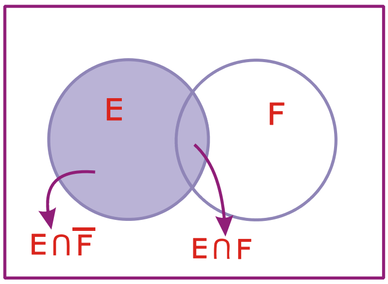
$$P\left(H \mid E\right) = \frac{P\left(H\right)}{P\left(H\right) + \left[1-P\left(H\right)\right] \dfrac{P\left(E \mid H^{c}\right)}{P\left(E \backslash H\right)}}$$

چون در مسئله مورد بحث، این بازی ورقها را تنها در صورتی می‌توان تقویت‌کننده فرض گناهکاری در نظر گرفت

که چنین نحوه بازی هنگامی که این دو نفر تقلب می‌کردند محتملتر از هنگامی باشد که تقلب نکنند. چون دادیار هرگز چنین اظهاراتی نکرده است، اظهاراتش مبنی بر این که این مدرک فرض گناهکاری را تقویت می‌کند معتبر نیست.

فرمول بیز:

برای زمانی که E را فقط به دو قطعه افراز کنیم داریم.



$$P\left(F\left|E\right.\right)=\frac{P\left(E\cap F\right)}{P\left(E\right)}=\frac{P\left(E\left|F\right.\right)P\left(F\right)}{P\left(E\left|F\right.\right)P\left(F\right)+P\left(E\left|\bar{F}\right.\right)P\left(\bar{F}\right)}$$

همچنین برای $P\left(\bar{F}\left|E\right.\right)$:

$$P\left(\bar{F}\left|E\right.\right)=\frac{P\left(E\cap \bar{F}\right)}{P\left(E\right)}=\frac{P\left(E\left|\bar{F}\right.\right)P\left(\bar{F}\right)}{P\left(E\left|F\right.\right)P\left(F\right)+P\left(E\left|\bar{F}\right.\right)P\left(\bar{F}\right)}$$

حال فرض کنید به جای دو قطعه چند قطعه داریم. یعنی S (فضای نمونه‌ای) به n قطعه $F_1, F_2, \ldots, F_n$ افراز شده باشد بطوریکه ، $1 \le i, j \le n$ و $F_i \cap F_j = \varnothing$

$$F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n = S$$

آنگاه فرمول بیز به این صورت در می‌آید.

$$(1 \le i \le n), P(F_i | E) = \frac{P(E \cap F_i)}{P(E)}$$

$$= \frac{P(E|F_i)P(F_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)P(F_i)}$$

کاربرد این فرمول زمانی است که محاسبه $P(E|F_i)$ و $P(F_i)$ ساده‌تر باشد که در مثالهـای زیـر کـه غالباً از کتاب نخستین درس احتمال کمک گرفته شده این موضوع نشان داده می‌شود.

مثال.

هواپیمایی گم شده و گمان می‌رود که در یکی از مناطق سه گانه ممکن به زمین نشسته باشد. فرض کنید $1-\alpha_i$ احتمالی را که این هواپیما به دنبال جستجوی منطقه iام پیدا شود در صورتیکه هواپیما در حقیقت در این منطقه است، $i=۱,۲,۳$، نشان می‌دهد (مقادیر ثابت به احتمالهای چشم‌انداز موسومند زیرا این مقادیر احتمال نظارت بر این هواپیما را نمایش می‌دهند و عموماً می‌توان آنها را به شرایط محیطی و جغرافیایی این منطقـه‌هـا نـسبت داد). احتمال شرطی که این هواپیما در منطقه i اُم، $(i=۱,۲,۳)$ باشد چقدر است، در صورتی که می‌دانـیم جـستجوی منطقه ۱ بدون نتیجه بوده است؟

حل.

فرض کنید R_i، $i=۱,۲,۳$ ، پیشامدی را که ایـن هواپیمـا در منطقـه i اُم باشـد، و E پیـشامدی را کـه جستجوی منطقه ۱ ناموفق بوده است نشان می‌دهد. از فرمول بیز داریم

$$P\left(R_1 \middle| E\right)=\frac{P\left(E\cap R_1\right)}{P\left(E\right)}$$

$$=\frac{P\left(E \middle| R_1\right)P\left(R_1\right)}{\sum_{i=1}^{3}P\left(E \middle| R_1\right)P\left(R_1\right)}$$

$$=\frac{(\alpha_1)^{\frac{1}{3}}}{(\alpha_1)^{\frac{1}{3}}+(1)^{\frac{1}{3}}+(1)^{\frac{1}{3}}}$$

$$=\frac{\alpha_i}{\alpha_i+2}$$

برای $j=$ ۲,۳

$$P\left(R_j \middle| E\right)=\frac{P\left(E \middle| R_j\right)P\left(R_j\right)}{P\left(E\right)}$$

$$=\frac{(1)^{\frac{1}{3}}}{(\alpha_1)^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}}$$

$$=\frac{1}{\alpha_1+2}\qquad,\qquad j=2,3$$

باید توجه داشت که احتمال بروز (یعنی شرطی) که هواپیما در منطقـه اسـت، در صـورتی کـه مـی‌دانـیم جستجوی منطقه i ناموفق بوده است، بزرگتر از احتمال اولیه است که هواپیما در منطقه j است هرگـاه $j\neq 1$ و کمتر از احتمال اولیه است وقتی $j=1$، که مسلماً بدیهی است، زیرا پیدا نکردن هواپیما به هنگام جستجوی منطقه ۱، به نظر می‌رسد که احتمال بودن هواپیما در این منطقه را کاهش داده و احتمال بودن آن را در جای دیگر افزایش می دهد. همچنین احتمال مشروط این که این هواپیما در منطقه ۱ باشد، در صورتی که می‌دانیم جستجوی اولین منطقه ناموفق است تابعی صعودی از احتمال چشم‌انداز α_1 است، که این نیز بدیهی است زیرا هر چقدر α_1 بزرگتر

باشد، منطقی‌تر است که جستجوی ناموفق را به «بدشانسی» نسبت دهیم در مقابل این که هواپیما آن جـا نباشـد.

بطور مشابهی $P\left(R_i \mid E\right)$، $j \neq 1$ تابعی نزولی از α است.

یک مثال جالب دیگر شبیه (حسن آقا!) البته (مثال حسن آقا!).

مثال.

فرض کنید سه کارت داریم که از نظر شکل یکسانند ولی دو طرف کارت اول به رنگ قرمز و دو طرف کارت دوم به رنگ مشکی و یک طرف کارت سوم به رنگ قرمز و طرف دیگرش به رنگ مشکی است. این سه کارت را در داخـل کلاهی خوب مخلوط و ۱ کارت را به تصادف از آن بیرون کشیده و بر روی میز قرار می‌دهیم. اگر طرف رو شده آن به رنگ قرمز باشد، احتمال این که طرف دیگرش به رنگ مشکی باشد چقدر است؟

حل.

فرض کنید RP، BB و RB به ترتیب پیشامدهای کارت منتخب تمام قرمز، تمام مشکی یـا نیمـی قرمـز نیمی مشکی است را نشان می‌دهند. فرض کنید R پیشامدی را که طرف رو شده کارت منتخب قرمز است نمایش می دهد در این صورت احتمال مطلوب از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
P\left(RB \mid R\right) &= \frac{P\left(RB \cap R\right)}{P\left(R\right)} \\
&= \frac{P\left(R \mid RB\right)P\left(RB\right)}{P\left(R \mid RR\right)P\left(RR\right)+P\left(R \mid RB\right)P\left(RB\right)+P\left(R \mid BB\right)P\left(BB\right)} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)}{(1)\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+0\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

بنابراین پاسخ برابر $\frac{1}{3}$ است. برخی دانشجویان پاسخ را برابر $\frac{1}{2}$ حدس می‌زنند بـا ایـن اسـتدلال نادرسـت کـه در صورتی که می‌دانیم طرف قرمز رو شده است، دو امکان هم وجود دارد: یکی این که، کارت تمام قرمز، یا کارت تمام

مشکی است. با وجود این اشتباه آنان در این جاست که فرض می‌کنند این دو امکان هم احتمالند. زیرا اگر تصور کنیم که هر کارت از دو طرف متمایز تشکیل شده است، آن‌گاه آزمایش دارای ۶ برآمد هم احتمال است — مثلاً $R_1, R_2, B_1, B_2, R_3, B_3$ - که در آن برآمد R_1 است اگر طرف اول کارت کلاً قرمز رو شود، R_2 است اگر طرف دوم کارت کلاً قرمز رو شود، R_3 است اگر طرف قرمز کارت قرمز- مشکی رو شود و به همین ترتیب الی آخر: چون طرف دیگر کارتی که طرف قرمز آن رو شده تنها در صورتی مشکی است که برآمد R_3 باشد، مشاهده می‌کنیم که احتمال مطلوب برابر احتمال شرطی R_3 است در صورتی که می‌دانیم R_1 یا R_2 یا R_3 رخ داده است، که آشکارا برابر $\frac{1}{3}$ است.

و آخرین مثال از کابرد بیز از کتاب نخستین درس احتمال:

در یک کلینیک روانپزشکی مددکاران اجتماعی بقدری گرفتاراند که بطور متوسط تنها ۶۰ درصد از بیماران جدید بالقوه که به کلینیک تلفن می‌زنند موفق می‌شوند بلافاصله با یک مددکار اجتماعی مکالمه کنند. از ۴۰ درصد بقیه خواسته می‌شود که شماره تلفن خود را بدهند. حدود ۷۵ درصد موارد را یک مددکار اجتماعی در همان روز تلفنی پاسخ می‌دهد و ۲۵ درصد بقیه را روز بعد. تجربه در کلینیک نشان می‌دهد احتمال این که تماس گیرنده‌ای از کلینیک به منظور مشاوره دیدن کند برابر ۰/۸ است اگر وی بلافاصله موفق به مکالمه با یک مددکار اجتماعی شود، اگر پاسخ تلفن بیمار همان روز یا روز بعد داده شود. این احتمال به ترتیب برابر ۰/۶ و ۰/۴ است.

۱. چه درصدی از بیماران که تماس تلفنی می‌گیرند برای مشاوره از کلینیک دیدن می‌کنند؟

۲. چه درصدی از بیماران که از کلینیک دیدن می‌کنند پاسخ تلفن خود را دریافت نکرده‌اند.

حل.

پیشامدهای V، I، S، F را با گزاره‌های زیر نشان می دهیم.

V: تماس گیرنده از کلینیک برای مشاوره دیدن می‌کند.

I: تماس گیرنده بلافاصله با یک مددکار اجتماعی مکالمه می‌کند.

S: به تماس گیرنده بعداً در همان روز پاسخ داده می‌شود.

F: به تماس گیرنده روز بعد پاسخ داده می‌شود.

در این صورت

$$\begin{aligned} P(V) &= P(V|I)P(I) + P(V|S)P(S) + P(V|F)P(F) \\ &= (.8)(.6) + (.6)(.4)(.75) + (.4)(.4)(.25) = .70 \end{aligned}$$

که در آن از این واقعیت که $P(S) = (.4)(.75)$ و $P(F) = (.4)(.25)$ بهره برده‌ایم. پس به (۱) پاسخ دادیم و برای پاسخ دادن به (۲) توجه داریم

$$\begin{aligned} P(l/V) &= \frac{P(V|l)P(I)}{P(V)} \\ &= \frac{(.8)(.6)}{.7} = .686 \end{aligned}$$

بنابراین ۶۹ درصد بیمارانی که از کلینیک دیدن می‌کنند پاسخ تلفن خود را بلافاصله توسط یک مددکار اجتماعی دریافت کرده‌اند.

اکنون کاربرد قاعده پرقدرت بیز (یعنی توانایی خوبی در حل مسائل به ما می‌دهد) را در مثالهایی دیدیم، یادمان باشد قاعده بیز را زمانی استفاده کنیم که $P(F_i|E), P(F_i)$ را داده باشند یا ساده‌تر از حل مستقیم مسئله بتوان آنها را بدست آورد. تشخیص درست F_i ها (افرازبندی S) هم نکته قابل توجهی می‌باشد.

امیدواریم چیزی از قلم نیفتاده باشد. پس می‌رویم سراغ بحث بعدی یعنی مسائل، که به علت اهمیت به عنوان یک بخش مستقل آمده است.