رشته‌ها و زبان:

همه ما با زبان‌هایی همچون فارسی، انگلیسی ، عربی و ... آشنا هستیم ولی اگر از ما بخواهند یک زبان را تعریف کنیم دچار مشکل خواهیم شد اگر یک فرهنگ لغت را به دست بگیرید با دو تعریف در آن روبرو خواهید شد.

۱. لغت

۲. قوانین سازنده آن

اما آیا این دو تعریف زبان را خواهند ساخت.

در ابتدا با یک مجموعه غیر تهی Σ از نشانه‌ها شروع می‌کنیم. این مجموعه را الفبا $(alphabet)$ می‌نامیم از این نشانه‌های مستقل رشته $(string)$ که از ترتیب متناهی از نشانه‌های الفبا ساخته شده را می‌سازیم. پس رشته را می‌توان ترتیبی از الفبا در نظر گرفت که پشت سرهم قرار گرفته‌اند.

برای مثال الفبا: $\Sigma = \{a , b\}$ را در نظر بگیرد می‌توانیم $abab$ و $aaabbab$ را رشته‌هایی از این الفبا در نظر بگیریم.برای راحتی کار الفبای $a,b,c,\ldots$ و نام رشته‌ها را $u,v,w,\ldots$ در نظر می‌گیریم.

برای مثال:

$$w = a\,baaa$$

اتصال $(concatenation)$ بین دو رشته **w** و **v** را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\left.\begin{aligned} w &= a_1a_2\ldots a_n \\ v &= b_1b_2\ldots b_m \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad wv = a_1a_2\ \ldots\ a_nb_1b_2\ \ldots\ b_m$$

و همچنین معکوس $(reverse)$ یک رشته با معکوس توالی رشته اولیه پدیدار می‌شود.

اگر w همان رشته بالایی باشد آنگاه معکوس آن به شکل زیر می‌باشد

$$w^R = a_na_{n-1}\ \ldots\ a_2a_1$$

طول $(langth)$ یک رشته با $|w|$ نشان داده می‌شود که نشان دهنده تعداد نشانه‌های شرکت کننـده در رشته می‌باشد. برای نشان دادن یک رشته خالی از نماد λ استفاده می‌نماییم. در زیر مثال‌هایی داریم:

$$|\lambda| = 0$$

برای همه مقادیر w $\quad \lambda w = w\lambda = w$

اگر $w = uv$ داشته باشیم، u را $Prefix$ و v را $suffix$ ، w مـی‌نـامیم. بـرای مثـال اگـر $w = abbab$ باشـد می‌توانیم هر کدام از اعضای $\{\lambda, a, ab, abb, abba, abbab\}$ را $prefix$ و در حالی که bab و ab و b را به عنوان $suffix$ ، w قبول کنیم.

اگر دو تعریف بالا طول و اتصال را در هم ادغام کنیم می‌توانیم براحتی به نتیجه زیر برسیم

$$|uv| = |u| + |v| \qquad (۱)$$

مثال.

رابطه (۱) را اثبات نمایید:

برای اثبات می‌توان از استقراء استفاده کرد. در حالتی که طول یکی، یک می‌باشد مثلاً:

$$|a| = 1$$
$$|wa| = |w| + 1$$

پرواضح است که درست می‌باشد حال اگر به صورت فرض داشته باشیم

$$|uw| = |u| + |w|$$

می‌توانیم برای $v = wa$ به صورت زیر بنویسیم

$$|v| = |w| + 1$$
$$|uv| = |uw\,a|$$
$$|uv| = |uw| + 1$$
$$|uw| = |u| + |w| + 1$$

و همین کار را برای چپ تساوی نیز می‌توانیم اعمال کنیم پس اثبات تکمیل می‌شود. اگر **w** یک رشته باشد w^n از تکرار رشته w در n دفعه می‌باشد. می‌توان دید در حالت $n = 0$

برای همه مقادیر w $\quad w^\circ = \lambda$

دو تعریف مهم:

اگر Σ الفبای ما باشد Σ^* نشان دهنده رشته‌ای می‌باشد کـه بـا اتـصال صـفر یـا بیـشتر نمادهـا از Σ می‌باشد، پس Σ^* همیشه شامل λ می‌باشد (در حالتی که صفر باشد) با جداسازی رشـته تهـی Σ^+ را ایـن گونـه تعریف می‌کنیم $\quad \Sigma^+ = \Sigma^* - \{\lambda\}$

اگر Σ را به صورت محدود تعریف کرده باشیم، Σ^* و Σ^+ همیشه به صورت نامحدود و بدون محدودیت به روی طول آن می‌باشد.

یک زبان به صورت عموم زیرمجموعه‌ای از Σ^* تعریف می‌شود. یک رشته در یک زبان جمله نامیـده مـی‌شـود. در واقع به این صورت نیز می‌توان بیان کرد: هر مجموعه از رشته‌های یک الفبا مثل Σ که بتوان منظور کرد یک زبان را می‌سازد. در ادامه به چند مثال می‌پردازیم.

مثال.

اگر $\Sigma = \{a, b\}$ پس

$$\Sigma^* = \{\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \ldots\}$$

و مجموعه $\{a, aa, aab\}$ یک زبان بر روی Σ می‌باشد. زیرا شامل یک مجموعه متناهی از جمله‌ها می‌باشد. ما این را یک زبان محدود می‌نامیم.

مجموعه $L = \{a^n b^n \;:\; n \ge 0\}$ یک زبان بر روی Σ می‌باشد. همان طور که دیده می‌شود ab و $aaabbb$ یک رشته از این زبان ولی abb از این زبان نمی‌باشد. این زبان نامحدود می‌باشد. اغلب ما به زبان‌های نامحدود علاقه داریم.

اگر زبان‌ها را مثل مجموعه‌ها فرض کنیم، اجتماع، اشتراک همانند آن تعریف می‌شود. می‌توانیم مکمل یک زبان را این گونه تعریف کنیم:

$$\overline{L} = \Sigma^* - L$$

معکوس یک زبان را به صورت زیر تعریف کنیم

$$L^R = \{w^R \;:\; w \in L\}$$

و همچنین اتصال دو زبان L_1 و L_2 با اتصال تک تک اعضای آن می‌باشد.

$$L_1 L_2 = \{xy \;:\; x \in L_1, y \in L_2\}$$

ما L^n را به صورت اتصال L به صورت n دفعه تعریف می‌کنیم. در حالت خاص داریم

$$L^\circ = \{\lambda\}$$

و $L^1 = L$ در هر زبانی معلوم می‌باشد.

در نهایت L^* و L^+ را تعریف می‌کنیم

$$L^* = L^\circ \cup L^1 \cup L^2 \cup \ldots$$
$$L^+ = L^1 \cup L^2 \;\ldots$$

مثال.

اگر $L=\{a^n b^n : n\geq 0\}$, $L^2=\{a^n b^n a^m b^m \;\; n\geq 0, m\geq 0\}$ می‌باشد.

قابل ملاحظه است که n و m هیچ ربطی به هم ندارند. $aabb\ aaabbb$ یک مثال از L^2 می‌باشد معکوس L به صورت زیر می‌باشد.

$$L^R=\{b^n a^n : n\geq 0\}$$

اما برای تعریف $\overline{L}$ و L^* با مشکل مواجه هستیم.