هندسه اعداد مختلط

۱. اعداد مختلط

$\sqrt{-1}$ را i می‌نامیم، در این صورت تمام اعداد منفی با معنی خواهد بود، در نتیجه معادله‌های درجه دوم، همگی ریشه های با معنی ای خواهند داشت برای مثال $+\sqrt{-9}$ و $-\sqrt{-9}$، یا در واقع $+3i\,,-3i$، ریشه های معادله $x^2+9=0$ هستند. اما این گونه اعداد، حقیقی نیستند، چراکه مجذور آنها مثبت نیست. بنابراین با اعداد جدیدی روبرو هستیم. این اعداد را اعداد مختلط (یا موهومی) نامیده اند.

نماد i، اولین بار توسط اویلر در قرن هیجدهم معرفی شده است و برابر است با $\sqrt{-1}$. بدین ترتیب به ازای اعداد حقیقی b,a، عدد $a+bi$، عددی مختلط است که به a بخش حقیقی و به b بخش مختلط گفته می‌شود. اگر $a+bi$ بنامیم،می‌نویسیم : $Re(z)=a$ و $Im(z)-b$، که I_m,R_e بترتیب معرف بخش حقیقی و مختلط هستند.

حال اگر اعداد مختلط z_2,z_1 را چنین تعریف کنیم:

$$z_1=a+bi \quad , \quad z_2=c+di$$

حاصل جمع و حاصل ضرب آن ها این گونه تعریف می‌شود

$$z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

$$z_1.z_2=(a+bi).(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

زیرا همان طور که گفتیم، $i_2 = -1$ می‌باشد.

بنابراین جمع و ضرب اعداد مختلط دارای خواص زیر است:

۱. جابجایی: $z_1.z_2 = z_2.z_1, z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

۲. شرکت پذیری: $z_1.(z_2.z_3) = (z_1.z_2).z_3, z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$.

۳. توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع: $z_1(z_2 + z_3) = z_1.z_2 + z_1.z_3$

صفر مختلط برابر است با $0 + 0i$، همچنین z' را قرینه z نامیم هر گاه: $z' = -z$. z'' را معکوس z گوییم هر گاه: $zz'' = 1$، بدین ترتیب:

$$z'' = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2}$$

در نتیجه حاصل تقسیم z_1 بر z_2 چنین محاسبه می‌شود:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1.z_2'' = (a+bi)\left(\frac{c}{c^2+d^2}\right) = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i$$

و یک نوع نمایش نیز به این شکل است: $z = a + bi \leftrightarrow z = (a,b)$.

بنابراین اگر فرض کنید $z_2 : (c,d), z_1 : (a,b)$ نقاطی در صفحه اند، داریم:

$$z_1 + z_2 = (a,b) + (c,d)$$

$$z_1.z_2 = (a,b).(c,d)$$

که جمع و ضرب آن ها بنابر آنچه که تعریف کردیم، چنین خواهد بود:

$$z_1 + z_2 = (a+c, b+d)$$

$$z_1.z_2 = (ac-bd, bc+ad)$$

توجه کنید که هر عدد مختلط توسط ۲ جزء (a,b) قابل نمایش است پس با این اعمـال روی R^2 دستگاهی از اعداد پدید می آید که به آن دستگاه اعداد مختلط گویند، و آن را با **C** نمایش مـی‌دهنـد. صفحه ای که نقاط آن را اعداد مختلط تشکیل دهند، صفحه مختلط می‌نامند. این صفحه دارای دو محور افقی و عمودی است. تمام اعداد مختلطی را در نظر بگیرید (مانند $z=(a,b)$) که بخـش مخـتلط آن صفر است، این اعداد به صورت

$$(a,0)=a+0i=a$$

خواهند بود و همان طور که مشاهده می شود، اعدادی حقیقی هستند. یعنی محور افقـی ایـن صـفحه، محور اعداد حقیقی است. حال اگر بخش حقیقی آن را صفر کنید، اعدادی به صورت $(0,b)=0+bi=bi$ بدست می آیند، که محور عمودی این صفحه را تشکیل می دهند و به اعداد مختلط محض معروفند.

با این تعاریف داریم:

$$(a,b)=a.(1,0)+b.(0,1)=a+bi$$

و آنچه که در مورد جمع و ضرب اعداد مختلط تعریف نمودیم بر تعریف آن در صفحه مختلط هم منطبـق خواهد بود. لذا نمایش عدد مختلط $a+bi$ در صفحه مختلط همان نمایش زوج مرتب (a,b) خواهد بود: