

اعداد مختلط

آشنایی با اعداد انگاری

یکی از مهمترین ویژگیهای اعداد حقیقی این است که در آنها اعمال: جمع، تفریق، ضرب و

تقسیم (به استثنای تقسیم بر صفر) را می توان انجام داد. بدین سبب است که معادله خطی کلی

$$ax + b = 0 \quad (a \neq 0)$$

را می توان در حوزه اعداد حقیقی حل کرد و چنین نوشت: $x = -b/a$. ولی وضعیت در مورد معادله

درجه دوم کاملاً متفاوت است. به عنوان مثال معادله درجه دوم

$$x^2 + 1 = 0$$

را در حوزه اعداد حقیقی نمی توان حل کرد و x را به دست آورد. مربع یک عدد حقیقی نمی تواند عددی

منفی باشد. بنابراین

$$x^2 + 1 \geq 1 > 0, \quad x \text{ به ازای هر عدد حقیقی}$$

از این رو به ازای هر عدد حقیقی x ، معادله $x^2 + 1 = 0$ ممنوع است. در چنین وضعیتی حوزه

دستگاه اعداد حقیقی را طور توسعه می دهیم که چنین معادله ای حل شدنی باشد. مثلاً برای یک طفل

دبستانی که فقط اعدادی درست مثبت را می شناسد معادله ای مانند

$$7 + \quad = 3$$

نا معقول می‌نماید. و برای کسانی که فقط اعداد صحیح را می‌شناسد معادله‌های $5x=2$ و $x^2=17$ جواب ندارند. اما با توسیع دستگاه اعداد به صورتی که اعدادی منفی، کسری و اصم را نیز در برگیرد، این معادلات به ترتیب جوابهای $4, 2/5, \sqrt{17}$ را خواهند داشت.

وضعیت برای معادله $x^2 + 1 = 0$ تقریباً همین طور است. دستگاه اعداد را چنان توسعه می‌دهیم تا اعدادی مثل $\sqrt{-1}$ ، یعنی عددی را که مربعش -1 است، نیز در بر گیرد. این گونه اعداد با احساس شهودی ما اصلاً جور در نمی‌آیند و در گذشته بسیاری از ریاضیدانان با معرفی این گونه هیولاها مخالفت داشتند و از این رو آنها را اعداد انگاری نامیده‌اند. وضعیت تا سده هیجدهم به همین منوال بود تا اینکه لئونهارت اوپلر (۱۷۰۷-۱۷۸۳) با کارهای استادانه روی اعداد انگاری نتایج متعدد جالبی بدست آورد. ک.ف. گاوس (۱۷۷۷-۱۸۵۵) با معرفی اعداد انگاری به صورت نقاط یک صفحه نام تازه اعداد مختلط را بر آنها نهاد و از آنها برای یافتن نتایجی چشمگیر از نظریه اعداد استفاده نمود. از این طریق عضویت اعداد مختلط را در سلسه اعداد مسجل ساخت. تقریباً در همان زمان آل. کوشی (۱۷۸۹-۱۸۵۷)، هنگام تلاش در پیدا کردن روشی یکنواخت برای محاسبه انتگرال‌های معین، حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع با متغیرهای مختلط را بررسی کرد. این امر سرآغاز نظریه توابعی بود که زمینه مساعدی برای کشف توابع بیضوی از سوی ن.ه. آبل (۱۸۰۲-۱۸۲۹) و کارل گوستاو یاکوبی (۱۸۰۴-۱۸۵۱) را فراهم ساخت. علاوه بر این، بسط هندسه تصویری نشان داد که استفاده از اعداد مختلط در هندسه نیز امری اجتناب ناپذیر است. پیشرفت تحقیقات روشن کرده است که برای اینکه ریاضیات، حتی فقط حساب دیفرانسیل و انتگرال را به خوبی بفهمیم، محدودیت غیر طبیعی حوزه اعداد حقیقی به ما حکم می‌کند که برای دستیابی به مفاهیم یکنواختی و همسازی، اعداد مختلط را نیز دخالت دهیم.

رسم بر این است که i ، حرف اول واژه *imaginary* (انگاری) را برای $\sqrt{-1}$ به کار می‌بریم. بدین

ترتیب اعداد مختلط اعدادی هستند به شکل $a + ib$ که a, b اعدادی هستند حقیقی و محاسبه با آنها

همانند محاسبه با اعداد حقیقی است، با در نظر گرفتن اینکه به جای i^2 باید، -1 قرار داد. مثلاً

$$(a + ib) \pm (c + id) = (a \pm c) + i(b \pm d)$$

$$(a + ib)(c + id) = ac + ibc + iad + i^2 bd$$

$$= (ac - bd) + i(bc + ad)$$

منظور از تقسیم دو عدد مختلط یعنی $(a + ib)/(c + id)$ یافتن عددی است مثل $x + iy$ که در تساوی

$$a + ib = (c + id)(x + iy)$$

صدق نماید، پس از محاسبه رابطه بالا داریم

$$a + ib = (cx - dy) + i(dx + cy)$$

پس کافی است اعداد x, y را چنان پیدا کنیم که در روابط $dx + cy = b, cx - dy = a$ صدق کنند. این

دستگاه معادلات یک جواب یکتای زیر را دارد.

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

مگر آنکه $c = d = 0$. بنابراین

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

البته همین نتیجه را می‌توانستیم از ضرب صورت و مخرج کسر $(a + ib)/(c + id)$ در $c - id$ نیز به

دست آوریم.

اما چرا چنین اعمالی موجه‌اند؟ آیا جمع یک عدد حقیقی a با یک عدد انگاری ib ویافتن

$a + ib$ همانند حاصل جمع $17m^2$ با 4 کیلوگرم و یافتن $21^0 C$ نیست؟ همین طور، $x^2 + 1 = 0$ ، دو

جواب دارد ولی i کدامیک از آنها است؟ توجه کنید که $x^2 - 1 = 0$ نیز دو جواب دارد که جواب دارد

که جواب مثبت آن 1 است و جواب دیگر آن -1 . اما آیا گفتن نامثبت است معنی دارد؟

تعریف اعداد مختلط

برای پاسخگویی به ایراد اخیر، اکنون تعریفی صوری از اعداد مختلط ارائه می‌دهیم. ولی ابتدا

ویژگیهای دستگاه حقیقی R را یاد آور می‌شویم.

I . ویژگیهای مربوط به عمل جمع

دو عدد حقیقی دلخواه a و b عدد سوم یکتایی را عین می‌کنند به نام مجموع آنها که

با $a + b$ نمایانده می‌شود، با ویژگیهای زیرین:

A_1 : قانون جابجایی: به ازای هر دو عدد $a, b \in \mathbb{I}$ ، $a + b = b + a$

A_2 : قانون شرکتپذیری: به ازای هر سه عدد $a, b \in \mathbb{I}$

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

A_3 : عنصر همانی در جمع: عدد حقیقی یکتایی که با 0 نمایانده می‌شود وجود دارد

چنان که:

$$a + 0 = 0 + a = a, \quad a \in \mathbb{I}$$

A_4 : عکس جمعی: به ازای هر عدد $a \in \mathbb{Z}$ ، منحصرأً یک عدد $a \in \mathbb{Z}$ وجود دارد چنان

$$a + x = x + a = 0 \quad \text{که:}$$

این جواب یکتا را با $-a$ نمایش می دهند.

II. ویژگیهای مربوط به عمل ضرب

دو عدد حقیقی دلخواه a, b منحصرأً یک عدد سومی به نام حاصلضرب را مشخص

می سازند که با ab نمایش داده می شود، با ویژگیهای زیرین:

$$M_1: \text{قانون جابه جایی: به ازای همه مقادیر } ab = ba, a, b \in \mathbb{Z}$$

$$M_2: \text{قانون شرکت پذیری: به ازای همه مقادیر } (ab)c = a(bc), a, b, c \in \mathbb{Z}$$

M_3 : عنصر همانی در ضرب: عدد حقیقی یکتایی وجود دارد که با 1 نمایانده می شود،

$$\text{به طوری که به ازای همه مقادیر } a.1 = 1.a = a, a \in \mathbb{Z}$$

M_4 : عکس ضربی: به ازای هر $a \in \mathbb{Z}$ ، با $a \neq 0$ عدد یکتایی مانند x وجود دارد چنان

$$ax = xa = 1 \quad \text{که:}$$

این جواب یکتا را با $1/a$ یا a^{-1} نشان می دهند.

III. قانون توزیع پذیری

$$\text{به ازای همه مقادیر } a(b+c) = ab+ac, a, b, c \in \mathbb{Z}$$

هر مجموعه ای که این ویژگیها را داشته باشد، هیات نامیده می شود. بدین ترتیب مجموعه اعداد

حقیقی R ، یک هیات است. همین طور، مجموعه Q مرکب از تمام اعداد گویا یک هیات است، ولی نه

مجموعه همه اعداد درست \mathbb{C} یک هیات تشکیل می دهند و نه مجموعه اعداد طبیعی \mathbb{N} .

در بخش قبل گفتیم اعداد مختلط به صورت $a + ib$ هستند که b, a اعدادی حقیقی اند. از این رو اساساً اعداد مختلط عبارت اند از زوج اعداد حقیقی b, a . بدین ترتیب یک تعریف رسمی به صورت زیر در می آوریم.

تعریف ۱. یک عدد مختلط زوج مرتب (a, b) از اعداد حقیقی است با ویژگیهای زیر: دو عدد مختلط $(c, d), (a, b)$ فقط و فقط وقتی برابرند که $b = d, a = c$. مجموع و حاصلضرب دو عدد مختلط $(c, d), (a, b)$ چنین تعریف می شوند:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$$

توجه کنید که تعریف تساوی اعداد مختلط ویژگیهای زیر را دارد:

الف. انعکاسی: به ازای هر عدد مختلط (a, b) ، $(a, b) = (a, b)$

ب. تقارن: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (c, d) = (a, b)$

ج. ترابایی: $(a, b) = (c, d), (c, d) = (e, f) \Rightarrow (a, b) = (e, f)$

قضیه ۱. با اعمال جمع و ضرب به صورتی که در بالا تعریف شدند، مجموعه C مرکب از همه اعداد

مختلط یک هیات تشکیل می دهند.

برهان. یک تمرین عملی است.

حال اعداد مختلط به شکل $(a, 0)$ را در نظر می گیریم، پس

$$(a, 0) \pm (b, 0) = (a \pm b, 0)$$

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0)$$

$$\frac{(a, 0)}{(b, 0)} = \left(\frac{a}{b}, 0 \right)$$

(به شرط اینکه $b \neq 0$)

که همانند اعمال میان دو عدد حقیقی b, a هستند. به عبارت دیگر اگر عدد مختلط $(a, 0)$ را به

عنوان عدد حقیقی a در نظر بگیریم هیچگونه اختلافی پیش نخواهد آمد. در نتیجه اعداد حقیقی را

اعداد مختلط خاصی می‌گیریم که مولفه دوم آنها صفر هستند.

اکنون عدد مختلط $(0, 1)$ را در نظر می‌گیریم. داریم

$$(0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

یعنی عدد مختلط $(0, 1)$ متناظر با $\sqrt{-1}$ در بخش قبلی است. طبیعی است که مربع $(0, -1)$ نیز -1 است،

ولی چنانچه بنویسیم $(0, 1) = i$ ، آن گاه عدد مختلط دلخواه (a, b) را می‌توانیم چنین بنویسیم

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0)$$

که توجیه کننده عدد مختلط $a + ib$ است.

عدد مختلط i را واحد انگاری می‌نامند. پس در هر عدد مختلط

$$\alpha = (a, b) = a + ib \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

a را جزء حقیقی عدد مختلط α می‌نامند و آن را با $\Re \alpha$ نمایش می‌دهند؛ همین طور b را جزء انگاری

عدد α خوانده و آن را با $\Im \alpha$ نشان می‌دهند. از این رو اعداد حقیقی، اعداد مختلطی هستند که جزء

انگاری آنها 0 است. از سوی دیگر اعداد مختلطی را که جزء حقیقی شان 0 باشد اعداد انگاری محض می نامند. دقیقاً توجه نمایید که هر دو جزء حقیقی و انگاری اعداد مختلط، اعداد حقیقی اند.

برای یک عدد مختلط $\alpha = (a, b) = a + ib$ عدد مختلط $(a, -b) = a - ib$ را مزدوج مختلط α یا

مزدوج عدد مختلط α می نامند و آن را با $\bar{\alpha}$ نمایش می دهند. به آسانی می توان روابط زیر را تحقیق نمود:

$$\overline{\alpha \pm \beta} = \bar{\alpha} \pm \bar{\beta}$$

$$\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}$$

$$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \quad (\beta \neq 0)$$

$$\Re \alpha = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2} \quad \Im \alpha = \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2i}$$

برای هر عدد مختلط $\alpha = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$)، حاصلضرب

$$\alpha \bar{\alpha} = a^2 + b^2$$

همواره عددی حقیق و نامنفی است. ریشه دوم نامنفی این عدد را کالبد یا قدر مطلق عدد مختلط

α گویند و آن را با $|\alpha|$ نمایش می دهند. از این رو

$$|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2} = (\alpha \bar{\alpha})^{1/2}$$

قضیه ۲. $|\alpha| = 0$ ، اگر و فقط اگر $\alpha = 0$.

برهان. می نویسیم $\alpha = a + ib$, ($a, b \in \mathbb{R}$) پس $|\alpha|^2 = a^2 + b^2$ بنابراین

$$|\alpha| = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0$$

اما به ازای هر دو عدد حقیقی b, a ، $b^2 \geq 0, a^2 \geq 0$ بنابراین

$$a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 0, b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 0, b = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 0$$

توجه کنید که در اینجا ما از این واقعیت که b, a اعدادی حقیقی هستند استفاده نمودیم. در غیر

این صورت $a^2 + b^2 = 0$ مستلزم تساوی های $a = b = 0$ نیست. مثلاً اگر بنویسیم $b = i, a = 1$ ،

آنگاه $a^2 + b^2 = 0$ ولی نه تساوی $a = 0$ برقرار است و نه تساوی $b = 0$.

به آسانی می توان ثابت نمود که:

$$|\Re \alpha| \leq |\alpha|, |\Im \alpha| \leq |\alpha|, |\bar{\alpha}| = |\alpha|$$

$$|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta| \quad (\text{به خصوص } |-\alpha| = |\alpha|)$$

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \quad (\text{به شرط } \beta \neq 0)$$

قضیه ۳. به ازای هر دو عدد مختلط β, α

$$\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ یا } \beta = 0$$

و یا هم ارز با آن

$$\alpha\beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0, \beta \neq 0$$

برهان. بنابر قضیه قبلی

$$\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow |\alpha\beta| = 0$$

$$\Leftrightarrow |\alpha| \cdot |\beta| = 0$$

چون $|\alpha|, |\beta|$ اعداد حقیقی اند

$$|\alpha| \cdot |\beta| = 0 \Leftrightarrow |\alpha| = 0 \text{ یا } |\beta| = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ یا } \beta = 0$$

توجه. در مجموعه ای که عمل ضرب در آن تعریف شده است، اگر $\alpha\beta = 0$ ولی $\alpha \neq 0$ و

$\beta \neq 0$ ، آنگاه β, α را مقسوم علیه های صفر گویند. قضیه قبلی مبین آن است که هیات اعداد مختلط

C مقسوم علیه صفر ندارد.

دستگاههایی جبری وجود دارند که مقسوم علیه های صفر دارند. به طور مثال مجموعه همه

ماتریسهای 2×2 به صورت

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; a, b, c, d \in \mathbb{I} \right\}$$

را در نظر می گیریم. جمع و ضرب در این مجموعه به ترتیب چنین تعریف می شوند.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ cc'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$$

عنصر صفر عبارت است از

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

پس با اینکه

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \text{ و } \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$$

ولی داریم

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

باید توجه داشت که در اثبات این قضیه از این موضوع استفاده شده است که هیات اعداد حقیقی

i ، مقسوم علیه صفر ندارد.

اهمیت اعداد مختلط

در بخش قبل دیدیم که هر معادله درجه دوم در هیات اعداد مختلط C جوابهایی دارد. اما در

مورد معادله‌های درجه سوم، درجه چهارم و غیره چه؟ آیا هر بار که با معادله‌های درجه بالا سروکار

داریم باید دستگاه اعداد را توسعه دهیم؟ یکی از زیباییهای دستگاه اعداد مختلط در معتبر بودن قضیه

زیر است.

قضیه ۴. (قضیه بنیادی جبر). معادله چند جمله‌یی :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

که در آن $a_k \in \mathbb{F}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$), $a_0 \neq 0$, $n \geq 1$ ، در \mathbb{F} جواب دارد. به عبارت دیگر

• از لحاظ جبری بسته است

معادله بالا را معادله چند جمله‌یی از درجه n (هنگامی که $a_0 \neq 0$) گویند. از قضیه بنیادی جبر

نتیجه می‌شود که:

فرع ۱. معادله چند جمله‌یی، درجه n ، با احتساب ریشه‌های مکرر، n ریشه در \mathbb{F} دارد.

مثال. معادله درجه سوم $z^3 + i = 0$ را حل کنید.

حل. می نویسیم $z = u + iv$ ، $(u, v \in \mathbb{R})$ ، پس، چون

$$(u + iv)^3 = u^3 + 3iu^2v - 3uv^2 - iv^3$$

باید داشته باشیم

$$\begin{cases} u^3 - 3uv^2 = 0 \\ 3u^2v - v^3 + 1 = 0 \end{cases}$$

از معادله اول نتیجه می شود

$$u(u^2 - 3v^2) = 0$$

پس

$$u^2 - 3v^2 = 0 \quad \text{یا} \quad u = 0$$

وقتی $u = 0$ ، از معادله دوم نتیجه می شود:

$$v^3 - 1 = 0 \quad (v-1)(v^2 + v + 1) = 0$$

چون $v \in \mathbb{R}$ ، $v^2 + v + 1 \neq 0$ ، لذا $z = i$ ، $v = 1$ \therefore هنگامی که $u - 3v^2 = 0$ ، $u = \pm\sqrt{3}v$ از

قرار دادن این مقدار در معادله دوم خواهیم داشت

$$8v^3 + 1 = 0 \quad \text{یعنی} \quad 3(\pm\sqrt{3}v)^2v - v^3 + 1 = 0$$

$$\therefore (2v+1)(4v^2 - 2v + 1) = 0$$

چون $v \in \mathbb{R}$ ، $4v^2 - 2v + 1 \neq 0$ و لذا $v = -1/2$ پس

$$u = m \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{و} \quad z = \frac{\pm\sqrt{3} - i}{2}$$

بنابراین سه ریشه به دست می آید

$$z = i, \quad \frac{\pm\sqrt{3} - i}{2}$$

گ.ف گاوس (۱۷۷۷-۱۸۵۵) در رساله اش چندین استدلال برای قضیه بنیادی جبر داده است.

خوانندگان علاقه مند به این استدلالها می توانند به کتابهای درسی استانده در آنالیز مختلط مانند: آنالیز

مختلط اثر باک و نیومن و جاذبه های آنالیز مختلط اثر بوآز مراجعه نمایند.

باید توجه داشت که قضیه بنیادی جبر به وجود جوابها در C حکم می کند ولی از چگونگی پیدا

کردن آنها صحبتی به میان نمی آورد. در واقع هیچ گونه دستور جبری کارساز برای یک چند جمله یی

غیر مشخصی از درجه ۵ (یا بالاتر) وجود ندارد.

