نابرابری مثلثی

در بخشهای قبل قدر مطلق عدد مختلط $\alpha = a + ib \ ,(a,b \in \mathbb{R})$، را چنین تعریف کردیم

$$|\alpha| = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}} = \left(a^2 + b^2\right)^{1/2}$$

و به چند ویژگی ساده قدرمطلق اشاره کردیم: اکنون نابرابری مثلثی را که مهم است اثبات می‌کنیم

قضیه۱. (نابرابری مثلثی). به ازای جمیع مقادیر $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$،

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

برهان.

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2)$$

$$= z_1\overline{z}_1 + (z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2) + z_2\overline{z}_2$$

$$= |z_1|^2 + 2\Re(z_1\overline{z}_2) + |z_2|^2$$

$$\le |z_1|^2 + 2|z_1\overline{z}_2| + |z_2|^2 \qquad \left(\because \Re\alpha \le |\alpha|, \alpha \in \mathbb{C} \ \text{به ازای}\right)$$

$$= |z_1|^2 + 2|z_1|.|z_2| + |z_2|^2 \qquad \left(\because |\overline{z}_2| = |z_2|\right)$$

$$= \left(|z_1| + |z_2|\right)^2$$

چون $|z_1 + z_2|$ و $|z_1| + |z_2|$ هر دو نامنفی اند خواهیم داشت

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

برای اثبات نابرابری دیگر باید توجه کرد که $z_1 = (z_1 + z_2) + (-z_2)$

$$\therefore |z_1| = |(z_1+z_2)+(-z_2)| \le |z_1+z_2| + |-z_2|$$

$$= |z_1+z_2| + |z_2|$$

از اینجا نتیجه می‌شود که

$$|z_1| - |z_2| \le |z_1+z_2|$$

با تعویض نقشهای z_2, z_1 خواهیم داشت.

$$|z_2| - |z_1| \le |z_1+z_2|$$

$$\therefore \big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1+z_2|$$

اکنون حالت تساوی را در نابرابری مثلثی در نظر می‌گیریم. حالت $z_1 = 0$ یا $z_2 = 0$ بدیهی است. از این رو حالتی را در نظر می گیریم که $z_1.z_2 \neq 0$. با مراجعه به برهان بالا ملاحظه می‌کنیم که تساوی هنگامی به دست می‌آید که

$$\Re(z_1\bar{z}_2) = |z_1\bar{z}_2|$$

اما یک عدد مختلط α فقط و فقط وقتی در تساوی $\Re\alpha = |\alpha|$ صدق می‌کند که α عدد حقیقی نامنفی باشد. پس نامساوی فوق فقط و فقط هنگامی به تساوی بدل می‌شود که

$$z_1\bar{z}_2 \ge 0$$

چون فرض کردیم $z_2 \neq 0$، از تقسیم طرفین این تساوی بر $|z_2|^2 (= z_2\bar{z}_2 > 0)$، خواهیم داشت $z_1 / z_2 > 0$.

گفته های خود را خلاصه کنیم، تساوی $|z_1+z_2| = |z_1| + |z_2|$ فقط و فقط هنگامی برقرار است که $z_1 / z_2 > 0$ مگر اینکه یا $z_1 = 0$ یا $z_2 = 0$. به عبارت دیگر یکی از دو مقدار z_1 و z_2 باید

دارای این ویژگی باشد که مضرب مثبتی از دیگری باشد. یک برهان دیگر از این حکم را در انتهای بخش نمایش قطبی اعداد مختلط، خواهیم آورد. دلیل نام ((نابرابری مثلثی)) در بخش بعدی روشــن خواهــد شد.