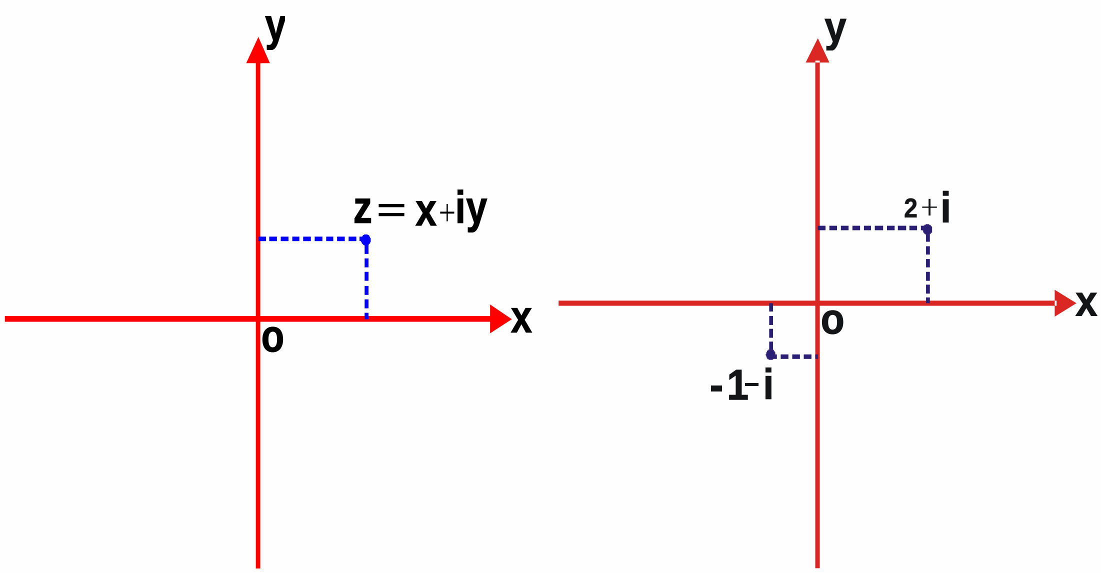
صفحه مختلط

عدد مختلط را به صورت زوج مرتب اعداد حقیقی تعریف کردیم. اما مجموعه همه زوجهای مرتب اعداد حقیقی یک تناظر یک به یک با نقاط (x, y) صفحه R^2 دارد. بنابراین طبیعی است که یک عـدد مختلط $z = x + iy$ را متناظر نقطه (x, y) در صفحه R^2 بگیریم.



شکل۱

انگاری محض $iy = 0 + iy$ با نقطه $(0, y)$ روی محور y ها متناظر می‌شود. از این رو محور x هـا را محور حقیقی و محور y ها را محور انگاری نامیده اند. صفحه ای که مجهـز بـه محورهـای حقیقـی و انگاری باشد، صفحه مختلط یا صفحه گاوس نامیده می‌شود.

اکنون به حاصل جمع اعداد مختلط در صفحه مختلط £ می‌پردازیم:

فرض کنید

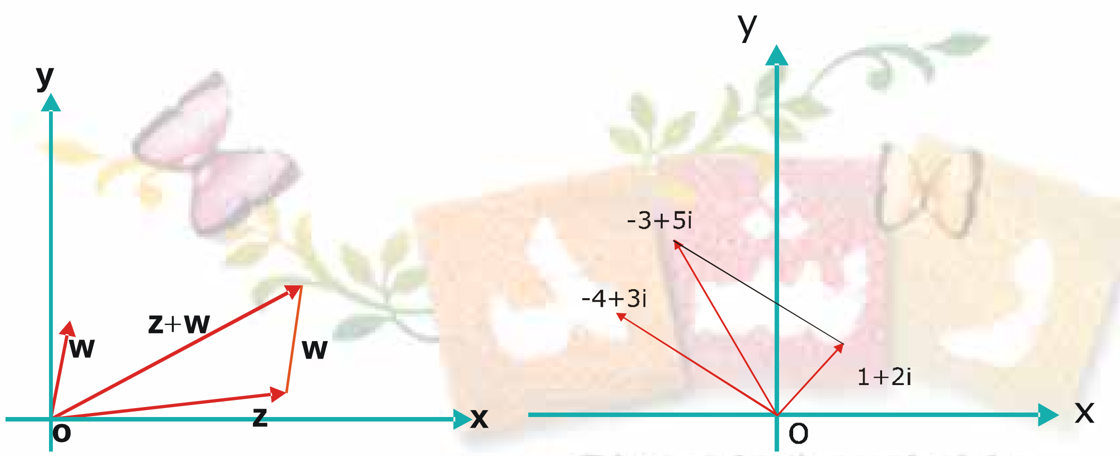
$$z = x + iy, \qquad w = u + iv \qquad (x, y, u, v \in \mathbb{R})$$

پس

$$z + w = (x + u) + i(y + v)$$

این رابطه، این مطلب را به ذهن القا می‌کند که بهتر است اعداد مختلط را به صورت بردار در نظر بگیریم. یعنی عدد مختلط $z = x + iy$ را برداری در نظر بگیریم که مبداش، مبدا مختصات و منتهایش عدد مختلط $z = x + iy$ باشد. به عبارت دیگر عدد مختلط $z = x + iy$ را برداری در نظر بگیریم که تصاویر قائم آن بر محورهای مختصات y, x باشند. طبیعی است که نظیر همین ملاحظات در مورد عدد مختلط w نیز صادق است. بدین ترتیب، مجموع $z + w$ برداری است متناظر با قطر متوازی الاضلاعی (به مبدا مرکز مختصات) که بر دو بردار w, z ساخته می‌شود. این گفته هم ارز است با رسم بردار z از مبدا مختصات و سپس رسم بردار w که مبداش در منتهای z باشد. در این صورت برداری که ابتدایش مبدا مختصات و منتهایش انتهای w است، نمایش بردار $z + w$ خواهد بود. (← شکل ۱)

از این پس، هر عدد مختلط را با یک نقطه یا یک بردار در صفحه مختلط (هر کدام که در موقعیت خاص مناسبتر باشد) مشخص می‌سازیم.

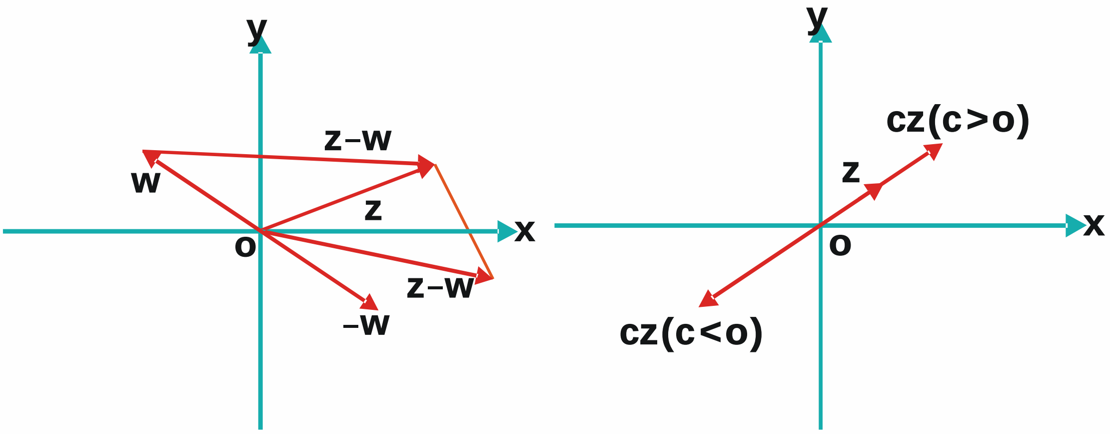


شکل۲

اکنون مضرب حقیقی از یک عدد مختلط را در نظر می‌گیریم. به ازای $z = x + iy$، $c \in \mathbb{R}$، داریم

$cz = cx + icy$. در این صورت اگر $c > 0$، اصلاً طول بردار را در c ضرب می کنیم (در همان جهـت).

در صورتی که $c < 0$، طول بردار را در $|c|$ ضرب و بردار را در جهت مخالف رسم می‌کنیم.



شکل ۳

به خصوص، چون $-w = (-1)w$، خواهیم داشت:

$$z - w = z + (-w)$$

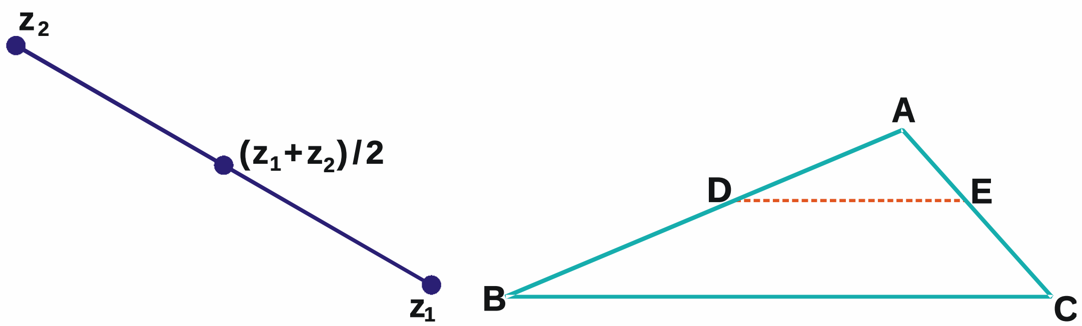
یعنی برای یافتن بردار $-w$، ابتدا جهت بردار w را عکس می‌کنـیم و مبـدا بـردار $-w$ را انتهـای z می‌گیریم. بدین ترتیب برداری که مبداش، مبدا z و انتهایش، انتهـای $-w$ اسـت، $z - w$ را نمـایش خواهد داد. به عبارت دیگر بردار $z - w$ برداری است که مبدا آن منتهای w و منتهای آن، منتهای z باشد. (به شرط آنکه w, z یک مبدا داشته باشند). باید توجه کرد که $z + w$ و $z - w$ دو قطر متوازی الاضلاعی هستند که $\vec{ow}, \vec{oz}$ دو ضلع مجاور آن هستند.

مثال۱. فرض کنید z_1 , z_2 دو نقطه در صفحه مختلط باشند. پس وسط پاره خطی که دو نقطه z_1 , z_2 را به هم وصل می‌کند،

$$z_1+\frac{1}{2}(z_2-z_1)=\frac{1}{2}(z_1+z_2)$$

خواهد بود.

مثال۲. در مثلث دلخواه ΔABC، اگر نقاط D, E را به ترتیب وسطهای اضلاع AB, AC بگیریم، موازی ضلع BC و طولش نصف طول BC خواهد شد.



شکل۴

حل. فرض کنید ΔABC در صفحه مختلط داده شده است، و z_1 , z_2 , z_3 به ترتیب اعداد مختلط متناظر با راسهای A, B, C هستند. در این صورت، وسطهای اضلاع AB, AC یعنی D, E به ترتیب متناظر با $1/2(z_1+z_2),1/2(z_1+z_2)$ خواهند شد. بنابر بردار $\overrightarrow{DE}$ با رابطه زیر داده می‌شود

$$\frac{1}{2}(z_1+z_3)-\frac{1}{2}(z_1+z_2)=\frac{1}{2}(z_3-z_2)$$

اما z_3-z_2 دقیقاً بردار $\overrightarrow{BC}$ و بنابراین نتیجه حاصل است.

مثال۳. نقطه z واقع بر پاره خط واصل بین نقاط z_2 , z_1 که این فاصله را به نسبت m/n تقسیم می‌کند با تساوی زیر داده می‌شود

$$z = \frac{nz_1 + mz_2}{n+m}$$

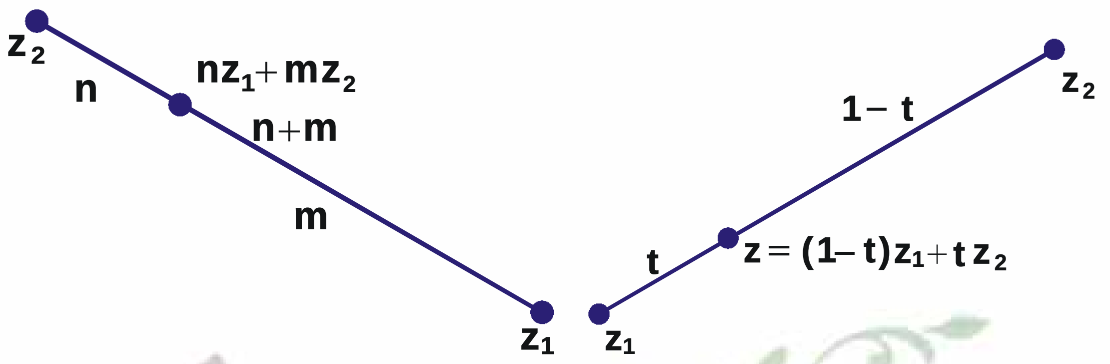
که در آن n, m اعداد حقیقی مثبت اند. زیرا به آسانی می‌توان دید که

$$\frac{z - z_1}{m} = \frac{z_2 - z}{n}$$

که این رابطه مطلوب را می‌دهد.

با بیانی هم ارز با بیان بالا، اگر z را نقطه ای دلخواه روی پاره خطی که نقاط z_2 , z_1 را به هم وصل می‌کند. بگیریم، آنگاه به ازای مقداری از $t \in \mathbb{R} , (0 < t < 1)$، داریم: $z - z_1 = t(z_2 - z_1)$

$$\therefore z = (1-t)z_1 + tz_2 \qquad (0 < t < 1)$$



شکل۵

به عکس، فرض کنید این رابطه برقرار باشد. پس چون استدلال مذکور دوسویی است، می‌توان نتیجه گرفت که z باید نقطه ای بر پاره خطی در صفحه مختلط باشد، که z_2, z_1 را به هم وصل می‌کند.

مثال۴. فرض کنید z_3, z_2, z_1 سه نقطه دلخواه در صفحه مختلط باشند. پس وسط پاره خط واصل بین نقاط z_3, z_2 نقطه $(z_2+z_3)/2$ است و بنابراین معادله پارامتری میانه مآر بر راس z_1 از $\Delta z_1 z_2 z_3$ چنین است

$$z=(1-t)z_1+t.\frac{z_2+z_3}{2} \qquad (0<t<1)$$

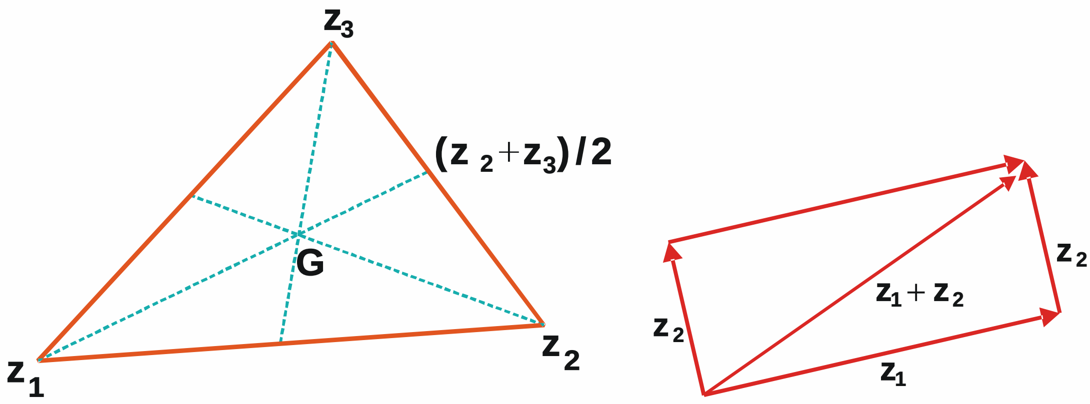
پس نقطه ای که این میانه را به طور درونی به نسبت $2/1$ تقسیم می‌کند با قرار دادن $t=2/3$ در عبارت بالا به دست می‌آید، یعنی

$$z=\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)$$

اما این عبارت نسبت به z_3, z_2, z_1 متقارن است، و لذا این نقطه میانه های مار از رئوس z_3, z_2 را نیز به طور درونی به نسبت $2/1$ تقسیم می‌نماید. بنابراین سه میانه مثلث دلخواه در یک نقطه متقاطع‌اند. این نقطه را مرکزوار یا مرکز ثقل $\Delta z_1 z_2 z_3$ گویند.

به ازای $z=x+iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$، قدر مطلق z را چنین تعریف می‌کنیم.

$$|z|=(z\bar{z})^{1/2}=\sqrt{x^2+y^2}$$



شکل ۶

باید توجه کرد که $|z_1 + z_2|, |z_1|, |z_2|$ طولهای سه ضلع یک مثلث اند و لذا نام نابرابری مثلثی

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

نامی است با مسمی. از لحاظ هندسی روشن است که این نابرابری فقط هنگامی به تساوی تبدیل می‌شود که مثلث به پاره خط بدل شود.

نمایش اعداد مختلط در مختصات قطبی

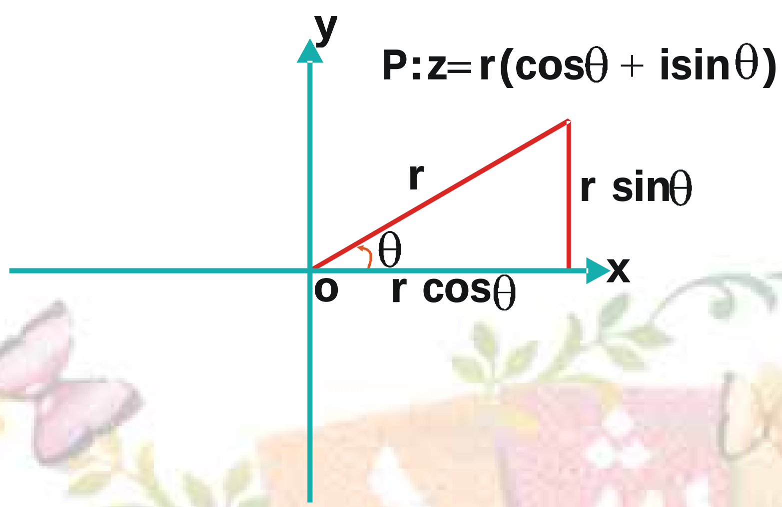
تا اینجا جنبه برداری اعداد مختلط را به کار گرفته ایم و به قدرت واقعی اعداد مختلط توجهی نکرده ایم. عمل ضرب برای اعداد مختلط عملی است خوشتعریف. در صورتی که برای بردارها چنین نیست. حاصلضرب نقطه ای (حاصلضرب داخلی) دو بردار، یک عددوار است نه یک بردار، در صورتی که ضرب خارجی دو بردار واقع در یک صفحه برداری است که دیگر در این صفحه نیست. (ضرب خارجی فقط در فضای سه بعدی مفید است.) اساس کاربرد اعداد مختلط در هندسه مسطحه بر این واقعیت استوار است که حاصلضربهای اعداد مختلط، اعدادی مختلطند.

برای ضرب اعداد مختلط بجاست که از نمایش قطبی اعداد مختلط استفاده کنیم. برای نقطه ای مانند $(P = x + iy)$ یا $P = (x, y)$ در صفحه مختصات، بردار $\overrightarrow{OP}$ (O مبدا مختصات) را در نظر می‌گیریم. فرض کنید θ زاویه بین $\overrightarrow{OP}$ وجهت مثبت محور x ها باشد $r = \overrightarrow{OP}$، پس $y = r\ \sin\theta, x = r\ \cos\theta$.

طبیعی است که θ با تقریب به پیمانه 2π یعنی θ تعیین می‌شود. یعنی، اگرازاختلاف مضرب صحیح 2π صرفنظر کنیم، θ به طور یکتا تعیین می‌شود. زاویه θ را شناسه عدد مختلط z می‌گویند.

در سراسر این مطالب همواره تساویهایی که متضمن شناسه باشند همنهشت به پیمانه 2π به حساب می‌آیند، مگر آنکه به صراحت خلاف آن عنوان شود، یعنی اختلاف مضارب 2π نادیده گرفته شود.

(r, θ) را مختصات قطبی نقطه P می‌گویند.



شکل۷

مبدا مختصات نقطه منحصر به فردی است که در آن $r = 0$. شناسه θ در مبدا مختصات تعریف نشده است.

اگر $z = x + iy (\neq i)$، نمایش قطبی z را می‌توانیم چنین بنویسیم.

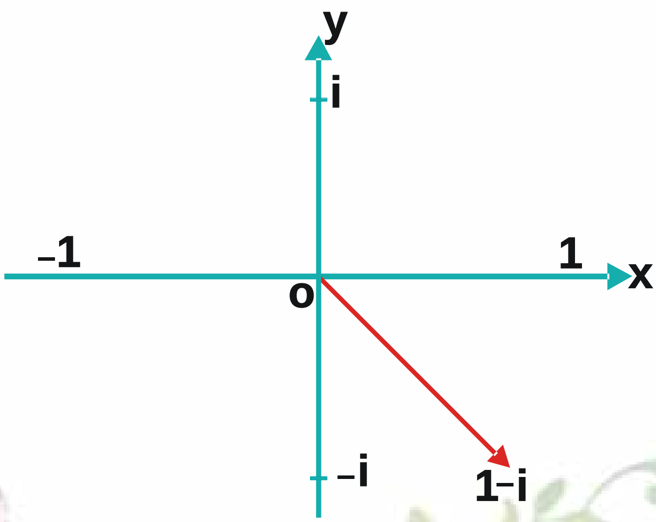
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

یعنی $\theta = \arg, r = |z|$ معرف شناسه z است.

مثال۱. به ازای $z \neq 0, z \in \text{£}$،

$z \Leftrightarrow \arg z = n\pi \quad (n \in \text{£})$ حقیقی است

$z \Leftrightarrow \arg z = \pm\frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n \in Z)$ انگاری محض است



شکل۸

به عبارت دیگر، قدرمطلق حاصلضرب، مساوی حاصلضرب قدرمطلقها و شناسه حاصلضرب مساوی مجموعه شناسه هاست.

برهان. بنا بر فرمولهای جمع داریم

$$z_1z_2 = z_1(cos\theta_1 + isin\theta_2).r_2(cos\theta_2 + i\ sin\theta_2)$$

$$= r_1r_2\{(cos\theta_1.cos\theta_2 - sin\theta_1.sin\theta_2)$$

$$+i\,(sin\theta_1.cos\theta_2 + cos\theta_1.sin\theta_2)\}$$

$$= r_1r_2\left\{cos\left(\theta_1+\theta_2\right)+i\ sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right\}$$

توجه. با محدود نمودن شناسه z به بازه $[0,2\pi]$ یا $[-\pi,\pi]$ شناسه z به ازای جمیع مقـادیر

$z \in £$ (بجز $z=0$) به طور یکتا مشخص می‌شود، ولی در این صورت رابطه

$$\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

معتبر نخواهد بود و $\arg z$ تابعی پیوسته از z نخواهد شد.

فرع ۱.

$$|z_1z_2...z_n| = |z_1|.|z_2|...|z_n|$$

$$\arg\left(z_1z_2...z_n\right) = \arg z_1 + \arg z_2 + ... + \arg z_n$$

فرع ۲. (دموآور).به ازای $z = r\left(cos\theta + i\ sin\theta\right)$, $n \in ¢$،

$$z^n = r^n\left(cos\theta + i\ sin\, n\theta\right)$$

یعنی

$$\left|z^n\right| = |z|^2, \qquad \arg\left(z^n\right) = n\arg(z)$$

برهان. فقط حالت $n=-1$ را ثابت می‌کنیم. داریم

$$(cos\theta + i\,sin\theta)(cos\theta - i\,sin\theta) = cos^2\theta + sin^2\theta = 1$$

از تقسیم دو طرف این تساوی بر $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ داریم

$$\frac{1}{r(\cos\theta+i\ \sin\theta)}=\frac{1}{r}(\cos\theta-i\ \sin\theta)$$

$$=\frac{1}{r}\{\cos(-\theta)+i\ \sin(-\theta)\}$$

زیرا $\sin(-\theta)=-\sin\theta, \cos(-\theta)=\cos\theta$

$$\therefore \left|z^{-1}\right|=|z|^{-1}, \quad \arg\left(z^{-1}\right)=-\arg(z)$$

فرع ۳.

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}, \qquad \arg\frac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2$$

(به شرط $z\neq 0$)

مثال۱. از فرمول دوموآور می‌توان فرمولهای توابع سینوس و کسینوس را استخراج نمود. اگـر در آن فرمول r را مساوی ۱ بگیریم، خواهد شد:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

بویژه به ازای $n=3$

$$\cos 3\theta+i\sin 3\theta=(\cos\theta+i\ \sin\theta)^3$$

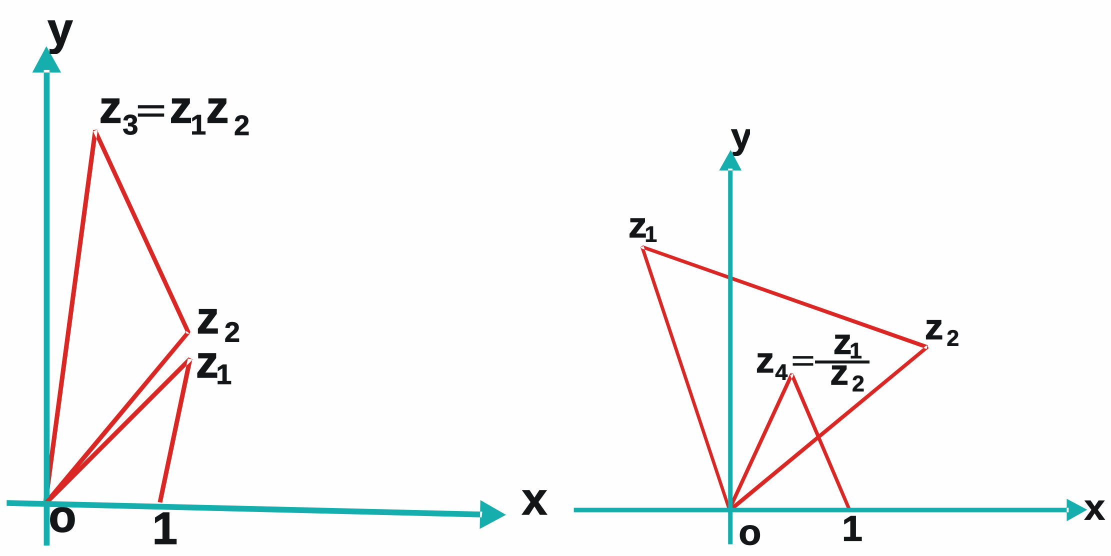
$$=\left(\cos^3\theta-3\cos\theta.\sin^2\theta\right)+i\left(3\cos^2\theta.\sin\theta-\sin^3\theta\right)$$

$$\therefore \cos 3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta.\ \sin^2\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$

$$\sin 3\theta=3\cos^2\theta.\sin\theta-\sin^3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$$

این قضیه می‌گوید که ضرب در z درصفحه مختلط به معنی بزرگ کردن (یا کوچک کردن) شکل به وسیله ضرب در عامل $|z|$، و دوران آن (پادساعتسو) به زاویه $\arg z$ است. به ویژه ضرب ۱ در i، یعنی دوران (پادساعتسو) به زاویه $\pi/2$ است.

با این مقدمات، اگر نقاط z_2, z_1 در صفحه مختلط داده شده باشند، می توانیم حاصلضرب $z_3 = z_1 z_2$ را به طور هندسی رسم کنیم. آنچه که باید توجه کنیم این است که $\Delta Oz_2, z_3, \Delta O1z_1$ متشابه (و هم جهت) اند.



شکل۱۰

همچنین برای رسم خارج قسمت $z_4 = (z_1/z_2)$ از راه هندسی، کافی است توجه کنیم که $\Delta O1z_4, \Delta Oz_2, z_1$ متشابه (و هم جهت) اند.

مثال۲. مطلوب است نمایش هندسی $1/(2+i)$. فرض کنید $z_2 = 1/(2+i), z_1 = 2+i$. پس $\Delta Oz_2 1, \Delta O1z_1$ متشابه (و هم جهت) اند و z_2 را طبق شکل ۱۱ رسم می‌کنیم.

اکنون به حالتی بر می‌گردیم که نابرابری مثلثی

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

به تساوی بدل می‌شود. با بررسی برهان متوجه می شویم که تساوی هنگامی و فقط هنگامی برقرار می‌شود که یکی از شرایط هم ارز زیر برقرار باشد:

۱. $\Re(z_1 \bar{z}_2) = |z_1 \bar{z}_2|$

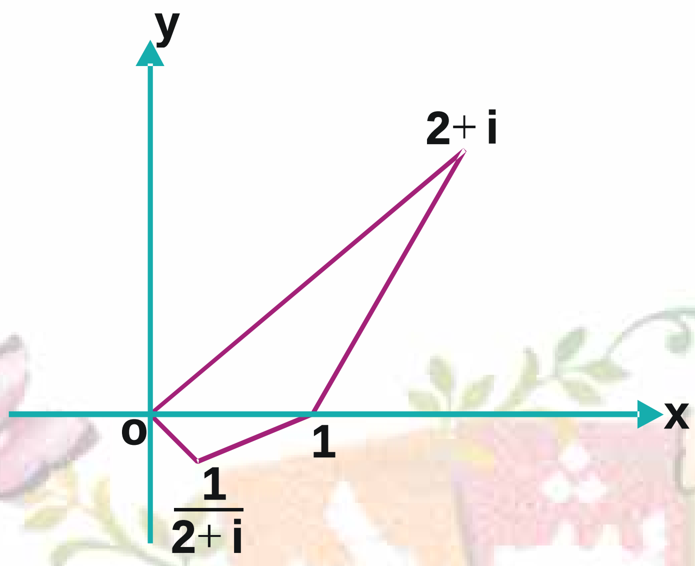
۲. $z_1 \bar{z}_2$ عدد حقیقی نامنفی باشد.

۳. z_1 / z_2 عدد حقیقی مثبتی باشد یا $z_1 z_2 = 0$.

۴. z_2, z_1 یک شناسه (به پیمانه 2π) داشته باشند.

۵. z_2, z_1 بر یک شعاع که از مبدا مختصات رسم می شود قرار داشته باشند.

۶. بردارهای $\overrightarrow{Oz_1}, \overrightarrow{Oz_2}$ یک امتداد داشته باشند.



شکل۱۱