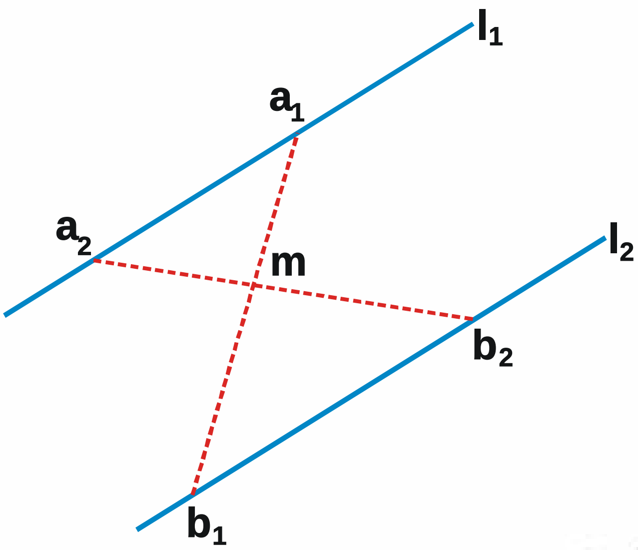
تقارن و بازتاب.

همان طور که می‌دانید، اگر نقطه b قرینه a نسبت به m باشد، آن گاه داریم:

$$m=\frac{a+b}{2} \quad \text{یا} \quad b=2m-a$$

همین طور قرینه یک شکل یا یک خط را می‌توان بدست آورد. برای مثال اگر خط l_2 قرینه l_1 نسبت به نقطه m باشد، برای هر نقطه $z_1 \in l_1$، وجود دارد $z_2 \in l_2$ بطوریکه:

$$z_2=2m-z_1 \quad \text{یا} \quad m=\frac{z_1+z_2}{2}$$



شکل۱

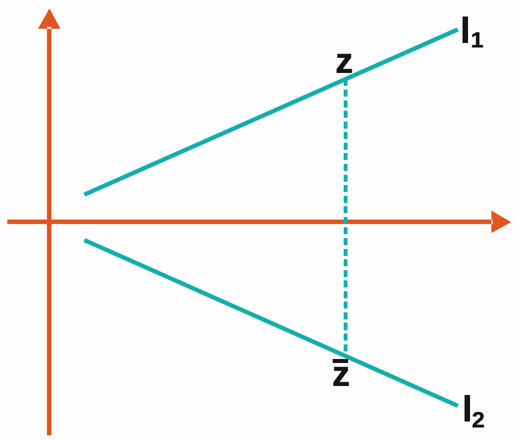
(وهمچنین به ازای هر $z_2 \in l_2$ وجود دارد $z_1 \in l_1$، که: $z_1=2m-z_2$) بنابراین اگر معادله l_1 برابر باشد با: $l_1: z=ka+b$ $(k \in \mathbb{R})$، داریم:

$l_2 : z = 2m - (ka + b)$

می‌دانیم قرینه z نسبت به محور x ها برابر با $\bar{z}$، و در نمایش قطبی $ke^{-i\theta}$ $(k \in \mathbb{R})$ قرینه $ke^{i\theta}$ است.

حال برای بدست آوردن بازتاب هر شکل یا هر خط، نسبت به محور حقیقی نیز می‌توان به همین ترتیب عمل کرد. برای مثال، بازتاب خط $l_1 : z = a.k + b$ $(k \in \mathbb{R})$ نسبت به محور حقیقی برابر است با:

$$l_2 : z = \bar{a}.k + \bar{b} \qquad (K \in \mathbb{R})$$



شکل۲

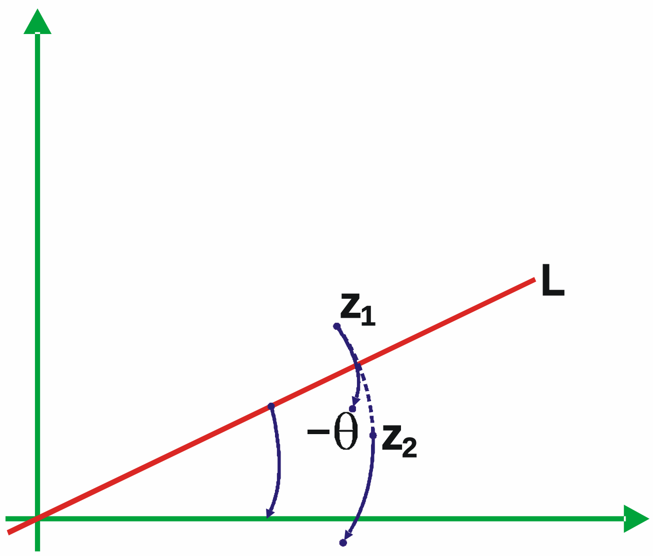
اما فرض کنید، بخواهیم بازتاب نقطه z_1 را نسبت به خطی مانند $l : z = ke^{i\theta}$ $(k \in \mathbb{R})$ بدست آوریم (این خط از مبدا می گذرد)، بنابراین اگر z_1 نقطه حاصل از این بازتاب باشد، می‌توان آن را به ترتیب زیر بدست آورد: ابتدا باید شکل را تحت زاویه θ حول مبدا دوران داد، تا خط l به محور x ها تبدیل شود، بنابراین نقاط متناظر با z_1, z_2 حاصل از این دوران برابرند با: $z_2 Cis(-\theta), z_1 Cis(-\theta)$.

پس باید داشته باشیم:

$$z_2 Cis(-\theta) = \overline{z_1 Cis(-\theta)}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$z_2 = \frac{\overline{z_1 Cis(-\theta)}}{Cis(-\theta)} = \overline{z_1}.Cis(\theta+\theta) = \overline{z_1}Cis(2\theta)$$

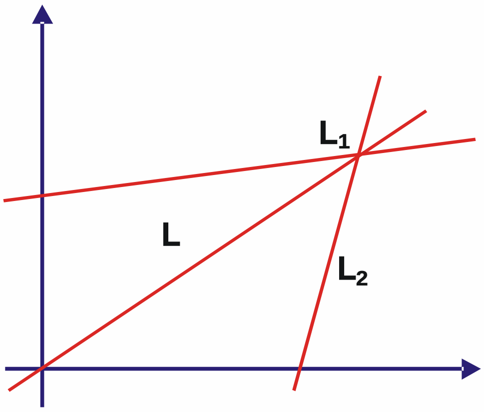


شکل ۳

بدین ترتیب بازتاب هر شکل یا هر خط را، نسبت به خطی که از مبدا می‌گذرد،مـی‌تـوان بدسـت آورد. برای مثال بازتاب خط $l_1 : z = ka_1 + b_1$ $(k \in \mathbb{R})$ **نسبت به خط** $l : z = ke^{i\theta}$ **برابر است با:**

$$l_2 : z = \left(k\overline{a_1} + \overline{b_1}\right)Cis\,2\theta$$

(توجه کنید که l **نیمساز زاویه ای است که از برخورد** l_2, l_1 **بوجود آمده)**



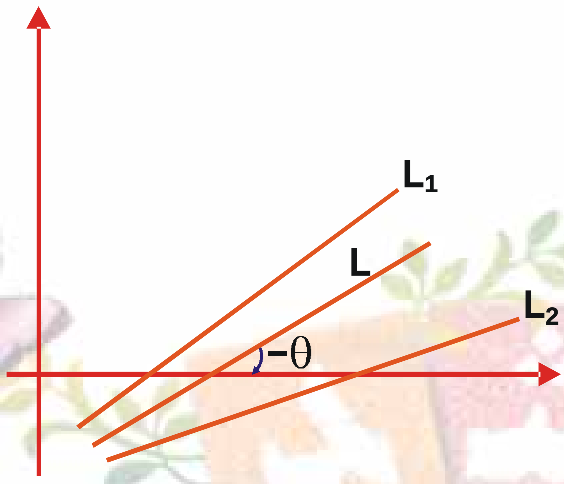
شکل۴

حال اگر بازتاب نقطه z_1، نسبت به خط l، به معادله $l: z = ke^{i\theta} + b \ (k \in \mathbb{R})$ را که از مبـدا نمی‌گذرد، z_2 بنامیم، z_2 را می توان با انتقال به اندازه $-b$ بدست آورد، بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$z_2 - b = \left(\overline{z_1 - b}\right) Cis\,(2\theta) \Rightarrow z_2 = \left(\overline{z_1} - \overline{b}\right) Cis\,(2\theta) + b$$

و مشابهاً بازتاب خط l_1 به معادله $l_1 : z = ka_1 + b_1$، نسبت به خط $l : z = ke^{i\theta} + b \ (k \in \mathbb{C})$ از معادله زیر بدست می‌آید:

$$l_2 : z = \left(k\,\overline{a_1} + \overline{b_1} - b\right) Cis\,(2\theta) + b$$



شکل۵