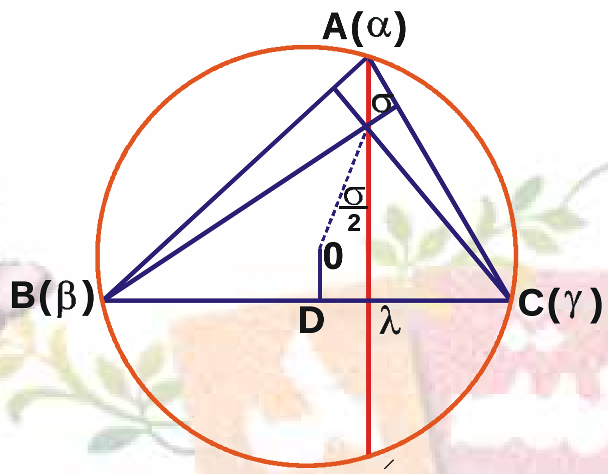
دایره نه نقطه

مثلث ABC داده شده است. مرکز دایره محیطی آن O، را مبدا در صفحه مختلط می‌گیریم و فرض می‌کنیم α, β, γ اعداد مختلطی به ترتیبی معرف راسهای A, B, C باشند. بی آنکه از کلیت کاسته شود می‌توان شعاع دایره محیطی مثلث را ۱ فرض کرد، یعنی $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$.

پس طبیعی است سؤال کنیم که نقطه $\sigma = \alpha + \beta + \gamma$ در کجاست؟

چون داریم $\sigma - \alpha = \beta + \gamma$ و به علاوه $\frac{\beta+\gamma}{2}$، نقطه D وسط ضلع BC است، σ بر عمود مرسوم از راس A بر ضلع BC واقع و طول $|\sigma - \alpha|$ دو برابر طول OD خواهد شد. با توجه به تقارن، σ بر عمود وارد از B بر CA و همچنین بر عمود مرسوم از C بر AB نیز قرار دارد. یعنی σ همان نقطه H، محل برخورد ارتفاعهای ΔABC است. توجه دارید که نشان دادیم سه عمود مرسوم از راسهای مثلث بر اضلاع مقابل در یک نقطه که مرکز ارتفاعات ΔABC نامیده می‌شود متقارب اند.



شکل۱

اما $\frac{\sigma}{2}=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$ نقطه وسط پاره خطی است که مرکز دایره محیطی O را به H، مرکز ارتفاعات، وصل می‌کند. فاصله $\frac{\sigma}{2}$ تا نقطه D، وسط ضلع BC، برابر است با

$$\left|\frac{\beta+\gamma}{2}-\frac{\sigma}{2}\right|=\left|\frac{\alpha}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

همین طور فاصله $\frac{\sigma}{2}$ تا نقطه E وسط ضلع CA، و تا نقطه F وسط ضلع AB همه برابر $\frac{1}{2}$ است.

علاوه بر این فاصله نقطه $\frac{\sigma}{2}$ تا وسط پاره خطی که مرکز ارتفاعات H را به راس A وصل می‌کند.

برابر است با

$$\left|\frac{\alpha+\sigma}{2}-\frac{\sigma}{2}\right|=\frac{|\alpha|}{2}=\frac{1}{2}$$

همین طور فاصله $\frac{\sigma}{2}$ تا وسط BH و نیز تا وسط CH همه برابر $\frac{1}{2}$ است.

برای یافتن λ، پای عمود وارد از راس A بر ضلع BC، ابتدا نقطه α'، محل تلاقی دیگر این عمود را با دایره محیطی مثلث حساب می‌کنیم. بنابراین α' باید در شرایط

$$\overrightarrow{\alpha\alpha'}\perp\overrightarrow{\alpha\alpha'},\quad |\alpha'|=1,\quad \alpha'\neq\alpha$$

صدق می‌نماید. از شرط اول نتیجه می‌شود که:

$\frac{\alpha-\alpha'}{\beta-\gamma}$ انگاری محض است

یعنی

$$\frac{\alpha-\alpha'}{\beta-\gamma}+\frac{\overline{\alpha}-\overline{\alpha'}}{\overline{\beta}-\overline{\gamma}}=0$$

با قرار دادن $\overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$ و غیره، این رابطه به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{\alpha-\alpha'}{\beta-\gamma}\left\{1+\frac{\beta\gamma}{\alpha\alpha'}\right\}=0$$

پس

$$\alpha'=-\frac{\beta\gamma}{\alpha}$$

برای آزمایش درستی محاسبات، ملاحظه می‌کنیم $|\alpha'|=1$ و $\dfrac{\beta}{\alpha}.\dfrac{\gamma}{\alpha'}=-1$ و نیز $\arg\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)+\arg\left(\dfrac{\gamma}{\alpha'}\right)=\pi$ که می‌رساند، $\overrightarrow{\alpha\alpha'}\perp\overrightarrow{\beta\gamma}$ یعنی α' نقطه تلاقی دیگر عمود مرسوم از راس A بر ضلع BC با دایره محیطی است.

اما فواصل راس B از σ,α' به ترتیب برابرند با

$$\left|\beta+\frac{\beta\gamma}{\alpha}\right|=\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|.|\alpha+\gamma|=|\alpha+\gamma|$$

$$|\sigma-\beta|=|(\alpha+\beta+\gamma)-\beta|=|\alpha+\gamma|$$

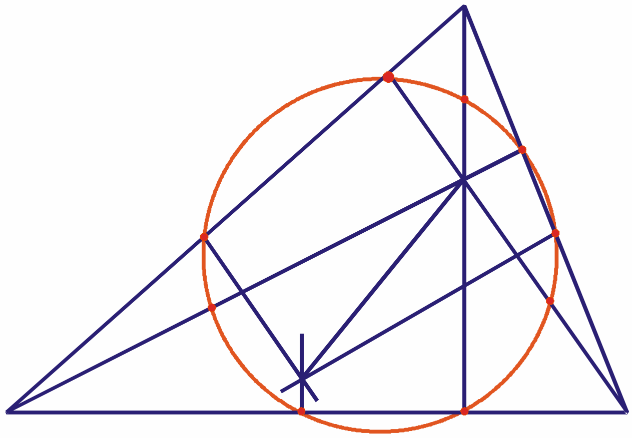
پس $\Delta\beta\alpha\alpha'$ یک مثلث متساوی الساقین است و

$$\lambda=\frac{1}{2}(\sigma+\alpha')=\frac{1}{2}\left(\sigma-\frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)$$

از اینجا نتیجه می‌شود که فاصله $\dfrac{\sigma}{2}$ تا λ (پای عمود مرسوم از راس A بر ضلع BC) چنین است

$$\left|\lambda-\frac{\sigma}{2}\right|=\left|\frac{\alpha'}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

همین طور فاصله $\dfrac{\sigma}{2}$ تا پاهای دیگر عمودها نیز برابر $\dfrac{1}{2}$ است.



شکل۲

به طور خلاصه چنین به دست آورده ایم.

قضیه۱. (دایره نه نقطه). در هر مثلث :

الف. پاهای عمودهای وارد از راسها بر اضلاع مقابل؛

ب. وسطهای اضلاع؛ و

ج. وسطهای پاره خطهایی که مرکز ارتفاعات را به سه راس وصل می‌کنند.

همه بر دایره ای واقع اند که مرکز آن وسط پاره خطی است که مرکز ارتفاعات را به مرکز دایره محیطی وصل می‌کند و شعاع آن نصف شعاع دایره محیطی است.

خط ماربر مرکز ارتفاعات، مرکز دایره محیطی، مرکزوار، و مرکز دایره نه نقطه به خط اویلر مثلث معروف است.

فرض می کنیم z_1, z_2, z_3 سه نقطه دلخواه بر دایره واحد $|z| = 1$ باشند. پس مرکز دایره محیطی، مرکزوار، مرکز دایره نه نقطه و مرکز ارتفاعات $\Delta z_1 z_2 z_3$ به ترتیب عبارت اند از

$$0, \quad \frac{1}{3}(z_1, z_2, z_3), \quad \frac{1}{2}(z_1 + z_2 + z_3), \quad (z_1 + z_2 + z_3)$$

و شعاع دایره نه نقطه برابر $\frac{1}{2}$است.

فرض می کنیم چهار نقطه z_4, z_3, z_2, z_1 بر دایره واحد داده شده باشند. اگر هر بار سه نقطه از این چهار نقطه را اختیار کنیم، چهار مثلث به دست می‌آید (که همه آنها محاط در این دایره واحدند).

مرکز دایره نه نقطه $\Delta z_2 z_3 z_4$ نقطه $T_1 = \frac{1}{2}(z_2 + z_3 + z_4)$ است،

مرکز دایره نه نقطه $\Delta z_1 z_3 z_4$ نقطه $T_2 = \frac{1}{2}(z_1 + z_3 + z_4)$ است،

مرکز دایره نه نقطه $\Delta z_1 z_2 z_4$ نقطه $T_3 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2 + z_4)$ است،

مرکز دایره نه نقطه $\Delta z_1 z_2 z_3$ نقطه $T_4 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2 + z_3)$ است،

و شعاع همه آنها برابر $\frac{1}{2}$ است.

نقطه

$$T = (z_1 + z_2 + z_3 + z_4)$$

را در نظر می‌گیریم. در این صورت، بی درنگ نتیجه می‌شود که

$$|T - T_1| = |T - T_2| = |T - T_3| = |T - T_4| = \frac{1}{2}$$

بنابراین دایره های نه نقطه مثلثهای :

$$\Delta z_2 z_3 z_4, \qquad \Delta z_1 z_3 z_4, \qquad \Delta z_1 z_2 z_4, \qquad \Delta z_1 z_2 z_3$$

همه از نقطه

$$T = \frac{1}{2}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4)$$

می‌گذرند. به خصوص مراکز چهار دایره نه نقطه فوق بر دایره ای به مرکز T و شعاع $\frac{1}{2}$ قرار دارند ایـن دایره را دایره نه نقطه چهار ضلعی $z_1 z_2 z_3 z_4$ می‌نامیم.

اکنون فرض می کنیم پنج نقطه z_5, z_4, z_3, z_2, z_1 بر دایره واحد داده شده باشند. پـس مرکـز دایره نه نقطه چهار ضلعی $z_2 z_3 z_4 z_5$ نقطه

$$\mu_1 = \frac{1}{2}\left(z_2 + z_3 + z_4 + z_5\right)$$

است و هکذا برای چهار ضلعیهای دیگر، و فاصله های این مراکز تا نقطه

$$\mu = \frac{1}{2}\left(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5\right)$$

برابرند با

$$\left|\mu - \mu_1\right| = \frac{1}{2}$$ و غیره

پس مراکز دوایر نه نقطه چهار ضلعیهای

$$z_1 z_2 z_3 z_4, \quad z_1 z_2 z_3 z_5, \quad z_1 z_2 z_4 z_5, \quad z_1 z_3 z_4 z_5, \quad z_2 z_3 z_4 z_5,$$

بر دایره ای به مرکز $\mu = \frac{1}{2}\left(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5\right)$ و شعاع $\frac{1}{2}$ قرار دارند. این دایره را دایره نـه نقطه پنج ضلعی $z_1 z_2 z_3 z_4 z_5$ می‌نامیم.

سپس، فرض کنید شش نقطه $z_6, z_5, z_4, z_3, z_2, z_1$ بر دایره واحد داده شده باشند و ...

از این رو یک رشته نامتناهی قضیه داریم که ج.ل. کولیج آنها را کشف کرده است.