قضیه های کانتور

باز مطلب را با حالت ساده ذیل آغاز می کنیم.

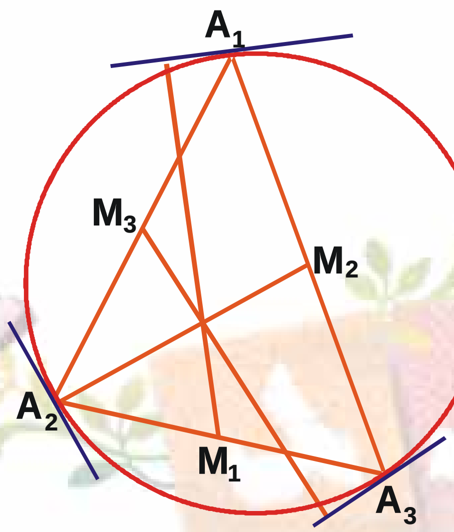
قضیه۱. (م. ب. کانتور). سه عمود وارد از وسطهای اضلاع یک مثلث بر مماسهای مرسوم بر دایره محیطی آن در راسهای متقابل، در مرکز دایره نه نقطه این مثلث متقارب اند.

برهان. بی‌آنکه از کلیت کاسته شود، می توان دایره محیطی $\Delta A_1 A_2 A_3$ را دایره واحد فرض کرد. خاطر نشان می‌سازیم که معادله خطی که از نقاط β,α واقع بر دایره واحد می گذرد چنین است

$$z+\alpha\beta\bar{z}=\alpha+\beta$$

چون خط مماس بر دایره واحد در α، همان حالت خاص قاطع است وقتی که β بر α منطبق شود، پس معادله مماس در α چنین خواهد شد

$$z+\alpha^2\bar{z}=2\alpha$$



شکل۱

اعداد مختلط متناظر با راسهای A_3, A_2, A_1 را به ترتیب با u_3, u_2, u_1 نمایش می‌دهیم. پس معادله مماس در نقطه A_1 عبارت است از

$$z + u_1^2 \bar{z} = 2u_1$$

بنابراین معادله عمود وارد از نقطه $M_1\left(\frac{u_2+u_3}{2}\right)$، وسط ضلع A_2A_3، بر این خط مماس چنین خواهد شد

$$z - u_1^2 \bar{z} = \frac{1}{2}\left\{(u_2+u_3) - u_1^2(\bar{u}_2+\bar{u}_3)\right\}$$

از قراردادن مختصات مرکز دایره نه نقطه $\Delta A_1A_2A_3$، یعنی $\frac{1}{2}(u_1+u_2+u_3)$، در طرف چپ این معادله خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2}\left\{(u_1+u_2+u_3) - u_1^2(\bar{u}_1+\bar{u}_2+\bar{u}_3)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(u_1+u_3) - u_1^2(\bar{u}_2+\bar{u}_3)\right\} \qquad (\because\ u_1\bar{u}_1 = 1),$$

که درست برابر طرف راست معادله است معادله است. از این رو مرکز دایره نه نقطه در معادله عمود مرسوم از M_1 بر مماس در A_1 صدق می کند. همین طور، مرکز دایره نه نقطه، بر عمودهای مرسوم از M_3, M_2 بر مماسهای در راسهای مقابل مربوطه نیز واقع است.

قضیه ۲. (م. ب. کانتور). فرض می‌کنیم n نقطه بر یک دایره داده شده باشند. از مرکزوار هر $n-1$ نقطه از این نقاط، عمودی بر مماس مرسوم بر دایره در نقطه باقیمانده، وارد می نماییم. در این صورت این n عمود در یک نقطه متقارب اند.

برهان. اثبات این قضیه، عملاً درست به همان صورت قضیه قبلی صورت می گیرد. n نقطه $u_1, u_2, ..., u_n$ را بر دایره واحد اختیار می‌کنیم. معادله مماس در u_1 بر دایره چنین است: $z + u_1^2 \bar{z} = 2u_1$. پس معادله عمود مرسوم از مرکزوار نقاط $u_2, u_3, ..., u_n$ یعنی نقطه

$$\frac{1}{n-1}(u_2 + u_3 + ... + u_n) = \frac{(\sigma - u_1)}{n-1} \qquad (\sigma = u_1 + u_2 + ... + u_n)$$

بر این مماس عبارت است از :

$$z - u_1^2 \bar{z} = \frac{1}{n-1}\{(u_2 + u_3 + ... + u_n) - u_1^2(\bar{u}_2 + \bar{u}_3 + ... + \bar{u}_n)\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\{(\sigma_1 - u_1) - u_1^2(\bar{\sigma}_1 - \bar{u}_1)\}$$

$$= \frac{1}{n-1}(\sigma - u_1^2 \bar{\sigma}_1)$$

واضح است که نقطه

$$\frac{1}{n-1}(u_1 + u_2 + ... + u_n) = \frac{\sigma_1}{n-1}$$

در این معادله صدق می‌کند.

هم اکنون به بیان دنباله نامتناهی از قضایا که م.ب. کانتور (۱۸۲۹-۱۹۲۰) کشف کرده مبادرت می‌ورزیم.

قضیه۳. $A_1, A_2, A_3, A_4, P_1, P_2$ را شش نقطه همدایره می‌گیریم. چهار نقطه اشتراک چهار زوج سیمسن مربوط به نقاط P_1, P_2 نسبت به مثلثهای

$$\Delta A_2 A_3, A_4, \quad \Delta A_1 A_3, A_4, \quad \Delta A_1 A_2, A_4, \quad \Delta A_1 A_2, A_3$$

همخط اند. این خط را خط کانتور دو نقطه P_1, P_2 نسبت به چهار ضلعی A_1, A_2, A_3, A_4 گویند.

برهان. بی آنکه به کلیت مطلب خللی وارد می آید، می توان فرض کرد که هر شش نقطه بر دایره

واحد قرار دارند و این نقاط را به ترتیب با اعداد مختلط u_1, u_2, u_3, u_4 و t_1, t_2 نمایش می‌دهیم.

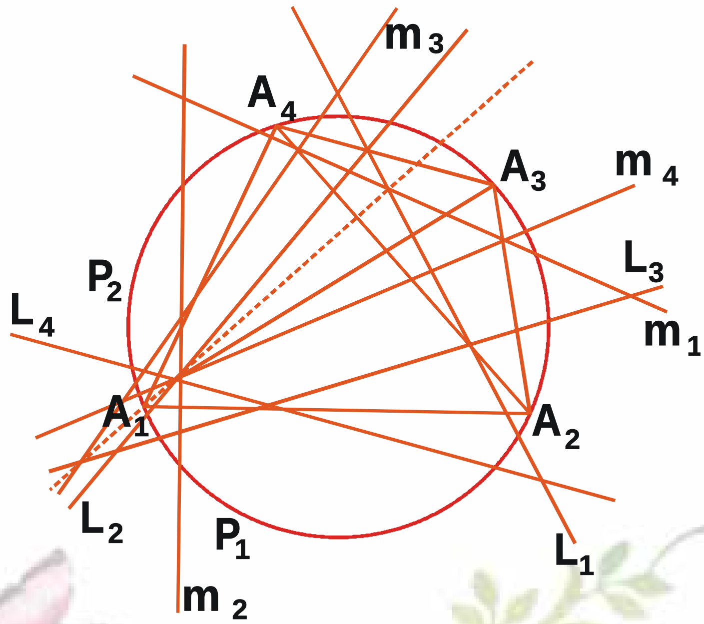
بنابراین معادله های خطوط سیمسن نقاط $P_1(t_1), P_2(t_2)$ نسبت به $\Delta A_2 A_3, A_4$ چنین خواهند شد

$$t_1 z - u_2 u_3 u_4 \bar{z}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ t_1^2 + (u_2 + u_3 + u_4) t_1 - (u_3 u_4 + u_4 u_2 + u_2 u_3) - \frac{u_2 u_3 u_4}{t_1} \right\},$$

$$t_2 z - u_2 u_3 u_4 \bar{z}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ t_2^2 + (u_2 + u_3 + u_4) t_2 (u_3 u_4 + u_4 u_2 + u_2 u_3) - \frac{u_2 u_3 u_4}{t_2} \right\}.$$



شکل۲

پس نقطه تلاقی این دو خط چنین خواهد شد

$$z=\frac{1}{2}\left[t_1+t_2+\left(u_2+u_3+u_4+\frac{u_2u_3u_4}{t_1t_2}\right)\right]$$

با قرار دادن

$$\sigma_1=u_1+u_2+u_3+u_4,$$

$$\sigma_2=u_1u_2+u_1u_3+u_1u_4+u_2u_3+u_2u_4+u_3u_4$$

$$\sigma_3=u_2u_3u_4+u_1u_3u_4+u_1u_2u_4+u_1u_2u_3$$

$$\sigma_4=u_1u_2u_3u_4$$

رابطه بالا چنین نوشته می‌شود

$$z=\frac{1}{2}\left\{t_1+t_2+\sigma_1-u_1+\frac{\sigma_4}{t_1t_2u_1}\right\}$$

و بنابراین

$$\bar{z}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{\sigma_3}{\sigma_4}-\frac{1}{u_1}+\frac{t_1t_2u_1}{\sigma_4}\right\}$$

با حذف u_1 از این دو رابطه، خواهیم داشت

$$t_1t_2z+\sigma_4\bar{z}=\frac{1}{2}\left\{(t_1+t_2)t_1t_2+\sigma_1t_1t_2+\sigma_3+\frac{\sigma_4(t_1+t_2)}{t_1t_2}\right\}$$

این رابطه ای است که باید نقطه تلاقی خطوط سیمسن نقاط P_2, P_1 نسبت به $\Delta A_2A_3A_4$ در آن صدق نماید. اما این رابطه نسبت به u_4, u_3, u_2, u_1 متقارن است ولذا باید نقطه تقاطع دو خط سیمســن نقاط P_2, P_1 نسبت به $\Delta A_1A_2A_3, \Delta A_1A_2A_4, \Delta A_1A_3A_4$ در آن صدق کند. از طرف دیگر این رابطه معادله یک خط راست است. بنابراین، این چهار نقطه تلاقی همخط اند.

قضیه۴. فرض کنید $A_1, A_2, A_3, A_4, P_1, P_2, P_3$ هفت نقطه همدایره باشند. سه خط کانتور سه زوج. نقاط : P_2 و P_3، P_3 و P_1، P_1 و P_2،نسبت به چهار ضلعی $A_1 A_2 A_3 A_4$ متقارب اند. این نقطه تقارب را نقطه کانتور سه نقطه P_1, P_2, P_3 نسبت به چهار ضلعی $A_1 A_2 A_3 A_4$ گویند.

برهان. به روال پیش، فرض می‌کنیم دایره مورد نظر، دایره واحد باشد و $u_1, u_2, u_3, u_4, t_1, t_2, t_3$ اعدادمختلطی به ترتیب معرف نقاط $A_1, A_2, A_3, A_4, P_1, P_2, P_3$ هستند. بنابراین معادله های خطوط کانتور زوجهای نقاط: P_2 و P_3، P_3 و P_1 نسبت به چهارضلعی A_1, A_2, A_3, A_4 چنین خواهد شد.

$$t_2 t_3 z+\sigma_4 \bar{z}=\frac{1}{2}\left\{(t_2+t_3) t_2 t_3+\sigma_1 t_2 t_3+\sigma_3+\frac{\sigma_4(t_2+t_3)}{t_2 t_3}\right\},$$

$$t_2 t_3 z+\sigma_4 \bar{z}=\frac{1}{2}\left\{(t_2+t_3) t_2 t_3+\sigma_1 t_2 t_3+\sigma_3+\frac{\sigma_4(t_3+t_1)}{t_3 t_1}\right\},$$

لذا نقطه تقاطع آنها چنین است

$$z=\frac{1}{2}\left\{t_1+t_2+t_3+\sigma_1-\frac{\sigma_4}{t_1 t_2 t_3}\right\}.$$

اما این عبارت نسبت به t_1, t_2, t_3 متقارن است و لذا خط کانتور دو نقطه P_1, P_2 نسبت به چهار ضلعی A_1, A_2, A_3, A_4 نیز از این نقطه می گذرد. بنابراین، این نقطه باید نقطه ی کانتور سه نقطه P_1, P_2, P_3 نسبت به چهار ضلعی A_1, A_2, A_3, A_4 باشد.

قضیه۵. فرض می‌کنیم $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, P_1, P_2, P_3$ هشت نقطه همدایره باشند. در این صورت پنج نقطه کانتور سه نقطه P_1, P_2, P_3 نسبت به چهار ضلعیهای

A_1, A_2, A_3, A_4، A_1, A_2, A_3, A_5، A_1, A_2, A_4, A_5، A_1, A_3, A_4, A_5، A_2, A_3, A_4, A_5

همخط اند. این خط را خط کانتور ۳ نقطه P_3 , P_2 , P_1 نسبت به پنج ضلعی $A_1 , A_2 , A_3 , A_4 A_5$ گویند.

برهان. همانند قبل،فرض می کنیم دایره مورد نظر دایره واحد باشد ،و $t_3 , t_2 , t_1 , u_5 , u_4 , u_3 , u_2 , u_1$ اعداد مختلطی باشند که به ترتیب نقاط $P_3 , P_2 , P_1 , A_5 , A_4 , A_3 , A_2 , A_1$ را نشان می‌دهند. بنابراین نقطه کانتور سه نقطه P_3 , P_2 , P_1 نسبت به چهار ضلعی A_2 , A_3 , A_4 , A_5 چنین است.

$$z = \frac{1}{2}\left\{ t_1 + t_2 + t_3 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 - \frac{u_2 u_3 u_4 u_5}{t_1 t_2 t_3} \right\}$$

با قرار دادن

$$\sigma_1 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5,$$

$$\sigma_2 = u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_1 u_4 + u_1 u_5 + u_2 u_3$$

$$+ u_2 u_4 + u_2 u_5 + u_3 u_4 + u_3 u_5 + u_4 u_5,$$

$$\sigma_3 = u_1 u_2 u_3 + u_1 u_2 u_4 + u_1 u_2 u_5 + u_1 u_3 u_4 + u_1 u_3 u_5$$

$$+ u_1 u_4 u_5 + u_2 u_3 u_4 + u_2 u_3 u_5 + u_2 u_4 u_5 + u_3 u_4 u_5,$$

$$\sigma_4 = u_2 u_3 u_4 u_5 + u_1 u_3 u_4 u_5 + u_1 u_2 u_4 u_5 + u_1 u_2 u_3 u_5 + u_1 u_2 u_3 u_4,$$

$$\sigma_5 = u_1 u_2 u_3 u_4 u_5,$$

رابطه بالا چنین می شود

$$z = \frac{1}{2}\left\{ t_1 + t_2 + t_3 + \sigma_1 - u_1 - \frac{\sigma_5}{u_1 t_1 t_2 t_3} \right\}.$$

$$\therefore \bar{z} = \frac{1}{2}\left\{ \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + \frac{\sigma_4}{\sigma_5} - \frac{1}{u_1} - \frac{u_1 t_1 t_2 t_3}{\sigma_5} \right\}.$$

با حذف u_1 از این دو رابطه خواهیم داشت

$$t_1 t_2 t_3 z - \sigma_5 \bar{z} = \frac{1}{2}\left\{(t_1 + t_2 + t_3) t_1 t_2 t_3 + \sigma_1 t_1 t_{23} - \sigma_4 - \frac{(t_2 t_3 + t_3 t_1 + t_1 t_2)}{t_1 t_2 t_3}\right\}.$$

این رابطه ای است که باید نقطه کانتور سه نقطه P_3, P_2, P_1 نسبت به چهار ضلعی A_2, A_3, A_4, A_5 در آن صدق کند. ولی این رابطه نسبت به A_5, A_4, A_3, A_2, A_1 متقارن است و بنابراین بایستی سه نقطه کانتور P_3, P_2, P_1 نسبت به چهار ضلعیهای A_1, A_3, A_4, A_5، A_1, A_2, A_3, A_4، A_1, A_2, A_3, A_5، A_1, A_2, A_4, A_5، نیز در آن صدق کنند. از طرف دیگر این معادله، معادله یک خط راست است. پس این پنج نقطه کانتور باید همخط باشند.

اکنون فرض کنید نه نقطه همدایره $P_4, P_3, P_2, P_1, A_5, A_4, A_3, A_2, A_1$ را داشته باشید، پس، ...