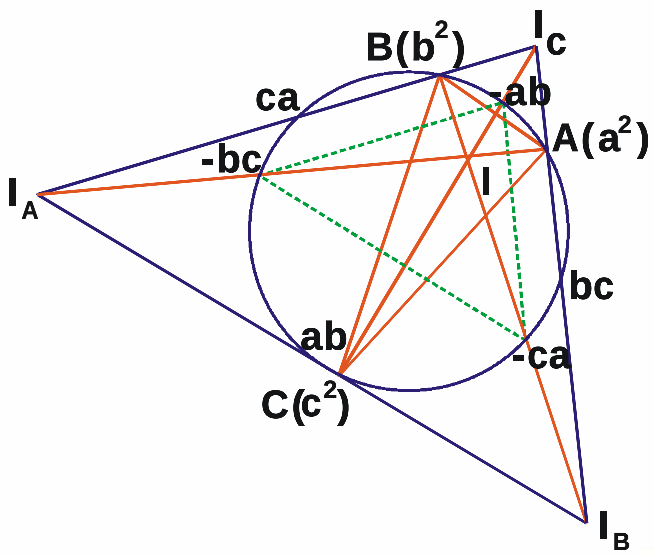
قضیه فویر باخ

فرض می‌کنیم H مرکز ارتفاعات ΔABC باشد. با توجه به اینکه دایره نه نقطه ΔABC، دایره نه نقطه $\Delta HAB, \Delta HCA, \Delta HBC$ نیز هست، قضیه زیرمنسوب به ک.و. فویر باخ (۱۸۰۰-۱۸۳۴)، دبیر دبیرستان ارلانگن، آلمان، که در سال ۱۸۲۲ آن را کشف کرده، به راستی جالب است.

قضیه۱. (فویر باخ). دایره نه نقطه مثلث، بر دایره محاطی داخلی و سه دایره محاطی خارجی آن مماس است (شکل ۱)



شکل۱

برهان. بی‌آنکه خللی در کلیت حاصل شود، می‌توان فرض کرد ΔABC در دایره واحد محاط است. برای اجتناب از به کار بردن علامتهای دست و پاگیر ریشه دوم، فرض می کنیم راسهای C, B, A به ترتیب با اعداد مختلط c^2, b^2, a^2 نمایش داده شوند.

نیمساز (داخلی) راس A از وسط آن کمان $\overset{\frown}{BC}$ که شامل راس A (در خود $\angle A$) نیست می‌گذرد، در صورتی که نیمساز خارجی راس A از وسط آن کمان $\overset{\frown}{BC}$ که شامل راس A (در خود $\angle A$) است می‌گذرد. نقطه اخیر را نقطه bc می نامیم. پس نقطه اولی باید $-bc$ باشد. همین طور اگر وسط آن کمان $\overset{\frown}{CA}$ را که شامل راس B (در خود $\angle B$) است، ca بگیریم، وسط آن کمان $\overset{\frown}{CA}$ که شامل راس B (در خود $\angle B$) نیست، $-ab$ خواهد شد.(توجه کنید که همواره این کار،در صورت لزوم، با تغییر علامت (های) b,a یا c میسر است. مثلاً فرض می‌کنیم C,B,A به طور پادساعتسو بر دایره واحد واقع باشند و نقطه A در $z=1$ باشد. c,b,a را چنان اختیار می‌کنیم که $(-\pi < \arg c < 0, 0 < \arg b < \pi, a=-1)$. بنابراین معادلات سه نیمساز (داخلی) به ترتیب خواهند شد:

$$z - a^2bc\overline{z} = a^2 - bc,$$

$$z - ab^2c\overline{z} = b^2 - ca,$$

$$z - abc^2\overline{z} = c^2 - ab,$$

از حل این دستگاه همزمان با انتخاب دو معادلات از این سه معادله داریم

$$z = -(bc + ca + ab).$$

طبق معمول، چنانچه قرار دهیم

$$\sigma_1 = a+b+c, \qquad \sigma_2 = bc+ca+ab, \qquad \sigma_3 = abc,$$

نقطه تلاقی فوق $z=-\sigma_2$ خواهد شد. واضح است که این نقطه در معادله سوم باقی مانده (بنابر تقارن) صدق خواهد کرد. پس نشان داده ایم که سه نیمساز داخلی یک مثلث در یک نقطه متقاطع اند. این نقطه تقاطع را مرکز درونی مثلث گویند.

اما نقطه $I:-\sigma_2=-bc-ca-ab$ ، نیز مرکز ارتفاعهای مثلثی است با راسهای $-ab,-ca,-bc$. این مطلب از مقایسه معادله نیمساز (داخلی) راس A و معادله خطی که دو نقطه $-ca,-ab$ را بهم وصل می‌کند یعنی:

$$z+a^2bc\overline{z}=-ca-ab.$$

روشن می شود. این امر برای دو نیمساز دیگر، نیز درست است.

مشاهده مشابه نشان می‌دهد که مراکز دوایر محاطی خارجی I_C,I_B,I_A مرکز ارتفاعات مثلثهایی به راسهای:

$-bc,ab,ca$؛

-ca,bc,ab ؛

-ab,ca,bc؛

هستند. چون همه این مثلثها محاط در دایره واحدند، داریم:

$I_A:-bc+ab+ca$

$I_B:-ca+bc+ab$

$I_C:-ab+ca+bc$

اکنون d ، فاصله بین مرکز دایره محاطی داخلی و مرکز دایره نه نقطه ΔABC را حساب می‌کنیم.

$$d=\left|\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)+\sigma_2\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|a^2+b^2+c^2+2\left(bc+ca+ab\right)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|(a+b+c)^2\right|=\frac{1}{2}\sigma_1\bar{\sigma}_1=\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\sigma_3}$$

می‌دانیم که شعاع دایره نه نقطه $\frac{1}{2}$ است. r شعاع دایره محاطی داخلی را حساب می‌کنیم: معادله خط BC عبارت است از :

$$z+b^2c^2\bar{z}=b^2+c^2$$

و لذا معادله عمود مرسوم از مرکز دایره محاطی داخلی $I(-\sigma_2)$ بر ضلع BC چنین است

$$z-b^2c^2\bar{z}=-\sigma_2+b^2c^2\bar{\sigma}_2=-\sigma_2+\frac{bc\sigma 1}{a}$$

پس پای این عمود با

$$z=\frac{1}{2}\left(b^2+c^2-\sigma_2+\frac{bc\sigma_1}{a}\right)$$

داده می‌شود از اینجا نتیجه می شود که شعاع دایره محاطی داخلی عبارت است از

$$r=\left|\frac{1}{2}\left(b^2+c^2-\sigma_2+\frac{bc\sigma_1}{a}\right)+\sigma_2\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|a\left(b^2+c^2\right)+a\sigma_2+bc\sigma_1\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\sigma_1\sigma_1-\sigma_3\right|$$

$$=\left|\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\sigma_3}-\frac{1}{2}\right|=\left|d-\frac{1}{2}\right|$$

که در آن از واقعیت $|a| = 1 = |\sigma_3|$ استفاده شده است. به آسانی می‌توان تحقیق کرد که: $d \le \frac{1}{2}$،

بنابراین داریم:

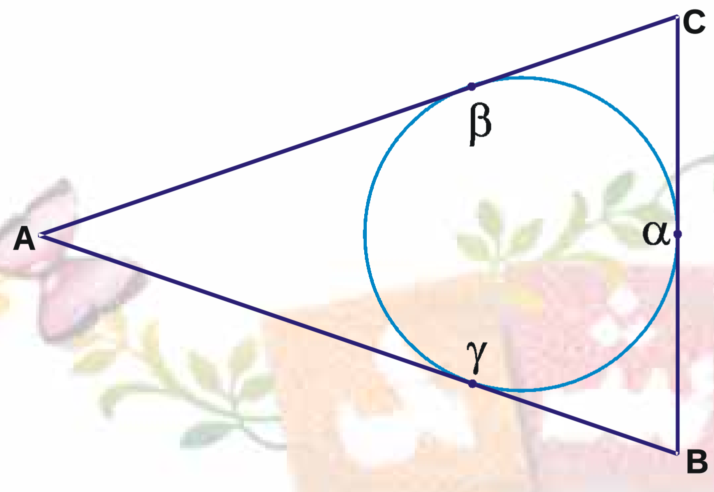
$$d = \frac{1}{2} - r \qquad \text{یعنی} \qquad r = \frac{1}{2} - d$$

که نشان می‌دهد دایره نه نقطه و دایره محاطی داخلی مماس داخل اند.

برای اینکه ثابت کنیم دایره محاطی خارجی I_A مماس است، فقط باید به جای $a, a-$ قرار دهیم و استدلال بالا را تکرار کنیم.

برهان دیگر. در برهان که در کتاب ب.ج. دیویس تحت عنوان، تابع شوارتز و کاربردهای آن آمده است، دایره واحد، نه به عنوان دایره محیطی، بلکه به عنوان دایره محاطی داخلی ΔABC گرفته شده است. فرض می کنیم نقاط تماس اضلاع AB, CA, BC با دایره واحد به ترتیب γ, β, α باشند. پس معادلات این سه ضلع چنین هستند.

$$z + \alpha^2 \bar{z} = 2\alpha, \qquad z + \beta^2 \bar{z} = 2\beta, \qquad z + \gamma^2 \bar{z} = 2\gamma$$



شکل۲

از حل این دستگاههای معادلات دو به دو، راسهای B, A، و C بـا اعـداد مخـتلط زیـر مـشخص می‌شوند.

$$A:\frac{2\beta\gamma}{\beta+\gamma},\qquad B:\frac{2\gamma\alpha}{\gamma+\alpha},\qquad C:\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$$

از این رو نقطه L وسط ضلع BC خواهد شد

$$\alpha\left(\frac{\gamma}{\gamma+\alpha}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)=\frac{(2\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)(\alpha\beta+\gamma\alpha)}{(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)(\beta+\alpha)}$$

$$=\frac{(\sigma_2+\beta\gamma)(\sigma_2-\beta\gamma)}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3}-\frac{\sigma_2^2-(\beta\gamma)^2}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3}$$

$$=\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3}-\frac{\sigma_3^2}{\alpha^2(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)}$$

که در آن

$$\sigma_1=\alpha+\beta+\gamma,\qquad \sigma_2=\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta,\qquad \sigma_3=\alpha\beta\gamma$$

همین طور نقاط N, M وسطهای AB, CA عبارت اند از

$$M:\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3}-\frac{\sigma_3^2}{\beta^2(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)}\qquad N:\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3}=\frac{\sigma_3^2}{\gamma^2(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)}$$

فرض می‌کنیم K نقطه ای باشد که با $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3}$ نمایش داده شده است، بنابراین واضح است که

$$\overline{KL} = \overline{KM} = \overline{KN} = \frac{1}{|\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3|}$$

بنابراین K باید مرکز دایره نه نقطه باشد و شعاع آن $1/|\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3|$ است. لذا معادله دایره نــه نقطــه

چنین خواهد شد

$$\left| z - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3} \right| = \frac{1}{|\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3|}$$

یعنی

$$\left(z - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3} \right)\left(\bar{z} - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3} \right) = \left(\frac{\sigma_3^2}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3} \right)^2$$

که در آن از روابط

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}, \qquad \bar{\sigma}_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_3}, \qquad \bar{\sigma}_3 = \frac{1}{\sigma_3}$$

استفاده شده است. از بسط رابطه اخیر خواهیم داشت

$$z\bar{z} - \left(\frac{\sigma_1^2 z}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3} + \frac{\sigma_2^2 \bar{z}}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3} \right) + \frac{\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3} = 0$$

از حل دستگاه معادلات متشکل از معادله اخیر (معادله دایره نه نقطه) و معادله دایــره محــاط داخلــی

$z\bar{z} = 1$ ، خواهیم داشت

$$\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2 z + \sigma_2^2 = 0 ؛$$

یعنی

$$(\sigma_1 z - \sigma_2)^2 = 0$$

از اینجا نتیجه می‌شود که اگر $\sigma_1 \neq 0$، دستگاه معادله های این دو دایره، ریشه مضاعف خواهد داشت، که می‌رساند این دو دایره برهم مماس اند. اگر $\sigma_1 = 0$ ، مثلث مفروض متساوی الاضلاع و دایره‌های نه نقطه و محاطی داخلی بر هم منطبق می‌شوند.

محاسبه بالا، بدون تغییر، معتبر است، حتی اگز دو تا از نقاط γ,β,α در امتداد الاضلاع مربوطه قرار داشته باشند (یعنی دایره واحد، دایره محاطی خارجی باشد) بدین ترتیب برهان، کامل می شود.■