

دسته دایره ها

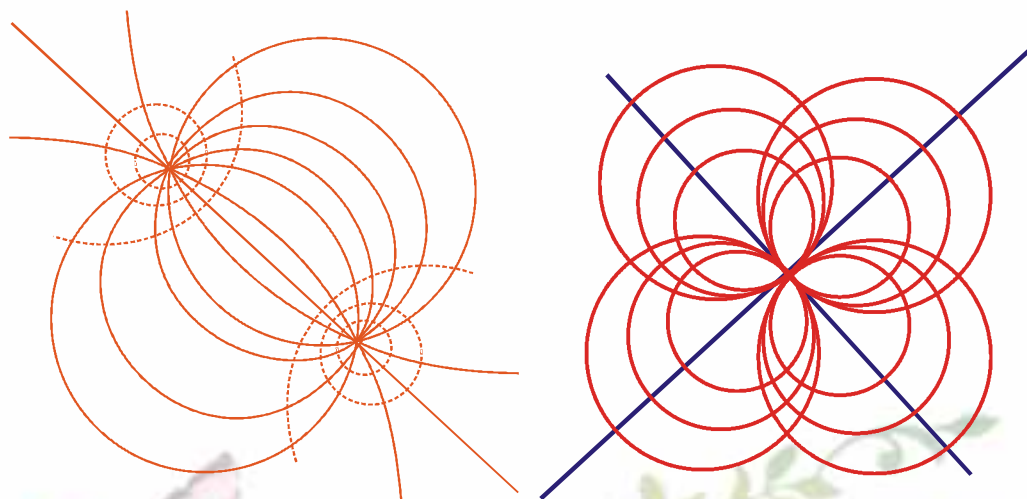
دو دایره C_2, C_1 مفروض اند. مجموعه همه دوایر عمود بر این دو دایره C_2, C_1 را دسته دایره های مزدوج C_2, C_1 گویند.

ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که دو دایره C_2, C_1 در صفحه Z متقاطع باشند. به موجب بحث بخش قبلی می‌توانیم C_2, C_1 را با یک تبدیل موبیوس بر دو خط متقاطع در مبدا صفحه توسیعی w بنگاریم. چون شرط لازم و کافی برای اینکه یک دایره بر دو خط متقاطع عمود باشد این است که مرکزش بر نقطه تقاطع این دو خط منطبق باشد، دسته دایره های مزدوج با دو دایره C_2, C_1 باید بر مجموعه همه دوایر هم مرکز به مرکز $w=0$ نگاشته شوند. به ازای هر نقطه از صفحه توسیعی w ، غیر از نقاط مبدا و بینهایت، فقط و فقط یک دایره هم مرکز در این دسته دایره ها وجود دارد که از این نقطه می‌گذرد. مبدا و بینهایت را نقاط حدی این دسته دایره ها می‌خوانند. در رابطه با شکل اولیه در صفحه Z ، معنی این نکته این است که از هر نقطه صفحه توسیعی Z (غیر از نقاط تقاطع دوایر C_2, C_1) دقیقاً یک دایره می‌گذرد و هیچ دو دایره ای از این دوایر در دسته دایره ها، همدیگر را قطع نمی‌کنند. رشته‌های این نوع دایره ها را دسته های دایره های هذلولوی می‌نامند.

اکنون حالتی را مورد توجه قرار می‌دهیم که دو دایره C_2, C_1 یکدیگر را قطع نمی‌کنند. در این حالت با یک تبدیل موبیوس می‌توانیم این دو دایره را به دو دایره هم مرکز به مرکز مبدا مختصات در صفحه w بنگاریم. اما یک ((دایره)) فقط و فقط هنگامی بر دو دایره هم مرکز عمود است که خطی باشد که از مرکز این دوایر بگذرد. از این رو نگاره دسته دایره های مزدوج با دو دایره C_2, C_1 باید

مجموعه همه ((دوایری)) باشند که از مبدا و نقطه بینهایت صفحه w می‌گذرند. در رابطه با شکل اولیه در صفحه 2، معنی این مطلب این است که دو نقطه وجود دارند به طوری که دوایر مار بر این دو نقطه فقط آن دوایری هستند که بر دو دایره مفروض C_2, C_1 عمودند. این دو نقطه تنها دو نقطه‌ای هستند که قرینه یکدیگر نسبت به هر دو دایره C_2, C_1 هستند. این نقاط را نقاط مشترک این دسته دایره‌ها گویند. دسته دایره‌های متشکل از همه دوایر ماربر دو نقطه ثابت را، دسته دایره‌های بیضوی گویند. (شکل ۱).

بالاخره حالتی را در نظر می‌گیریم که دو دایره مفروض C_2, C_1 در صفحه 2 بر هم مماس باشند. در این حالت می‌توانیم C_2, C_1 را به دو خط متوازی در صفحه w بنگاریم. یک ((دایره)) فقط و فقط، هنگامی بر دو خط متوازی عمود است که خطی باشد عمود بر آن دو خط متوازی،



شکل ۱

بنابراین دسته دایره‌های اولیه مزدوج با C_2, C_1 ، باید با یک تبدیل موبیوس بر مجموعه‌ای از خطوط عمود بر این دو خط متوازی نگاشته شوند. در رابطه با شکل اولیه در صفحه 2، معنی این مطلب

این است که از هر نقطه، بجز نقطه تماس دو دایره، فقط فقط یک دایره وجود دارد که از این نقطه می‌گذرد و در نقطه تماس دایره C_1, C_2 بر آنها عمود است. دایره این دسته یک نقطه مشترک دارند که در این نقطه بر هم مماس اند. این نوع دسته دایره‌ها را دسته دایره‌های سهموی نامند (شکل ۱)

روشن است که نوع دسته بر اثر یک تبدیل مویبوس عوض نمی‌شود. چون دسته دایره‌های هم مرکز به مرکز مبدا بر دسته خطهای مار از مبدا عمودند، ملاحظه می‌کنیم که یک دسته دایره هذلولوی ممکن است بر یک دسته دایره بیضوی عمود باشد. اگر دو دسته دایره این ویژگی را داشته باشند که هر دایره از این دسته بر هر دایره از دسته دیگر عمود باشد، آنها را دسته دایره‌های مزدوج می‌نامند. از این رو هر دسته دایره هذلولوی دقیقاً یک دسته دایره مزدوج دارد که بیضوی است. به عکس هر دایره بیضوی یک دسته مزدوج دارد که هذلولوی است. دسته دایره سهموی را می‌توان دو به دو با هم مزدوج گرفت، به خصوص اگر دو دایره دلخواه داده شده باشند، منحصرأً یک دسته دایره وجود دارد که شامل هر دوی آنهاست. این دسته دایره، بر حسب اینکه دو دایره داده شده، ۱۰ یا دو نقطه تقاطع داشته باشند، هذلولوی، سهموی یا بیضوی خواهند بود.

