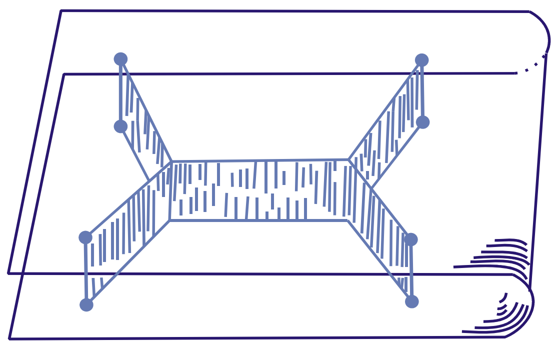
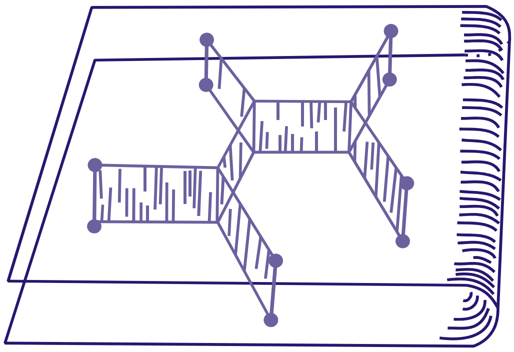
## حل تجربی مسئله‌های ریاضی دیگر

به علت پدیده کشش سطحی، لایه‌ای از مایع فقط در صورتی در حالت تعادل است که مساحتش مینیمم باشد. این موضوع، منبع زوال‌ناپذیر آزمایشهای مهمی از لحاظ ریاضی است. اگر اجزای مرزهای یک لایه آزاد گذاشته شوند تا بر رویهٔ مفروضی مانند صفحه حرکت کنند، آنگاه لایه در این مرزها عمود بر رویهٔ تعیین شده خواهد بود.



شکل (۱). نمایش کوتاهترین راه ارتباطی بین ۴ نقطه

می‌توانیم با استفاده از این موضوع نمایشهای چشمگیری از مسئلهٔ اشتاینر و تعمیمهایش ترتیب دهیم. دو صفحهٔ شیشه‌ای یا ورقهٔ پلاستیک شفاف و موازی را به وسیله دو یا سه میلهٔ عمودی به هم وصل می‌کنیم. اگر شیء حاصل را در محلول صابون فرو بریم و در آوریم، لایهٔ صابون دستگاهی مرکب از چند صفحهٔ قائم بین صفحه‌ها به وجود می‌آورد که میله‌های ثابت را به هم وصل می‌کنند.

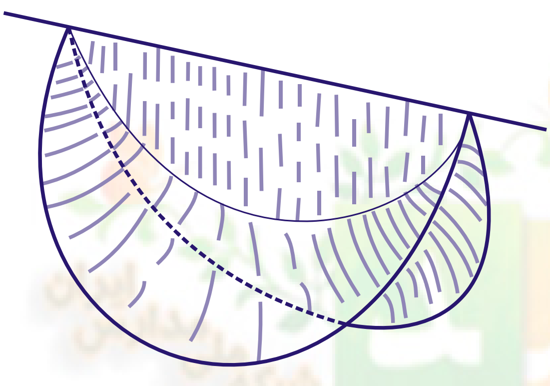


شکل (۲). کوتاهترین راه ارتباطی بین ۵ نقطه

اگر این صفحه‌ها موازی نباشند، میله‌ها عمود بر آنها نباشند، یا صفحه‌ها خمیده باشند، آنگاه خمهایی که به وسیلهٔ لایهٔ صابون روی ورقها تشکیل می‌شوند مستقیم نخواهند بود و نشان دهندهٔ مسئله‌های وردشی جدیدی هستند.

می‌توان ظهور خطهایی را که سه دامنه از یک رویهٔ مینیمال در آنها یکدیگر را به زوایای ۱۲۰ قطع می‌کنند، تعمیم پدیدهٔ مرتبط با مسئلهٔ اشتاینر به سه بعد دانست.

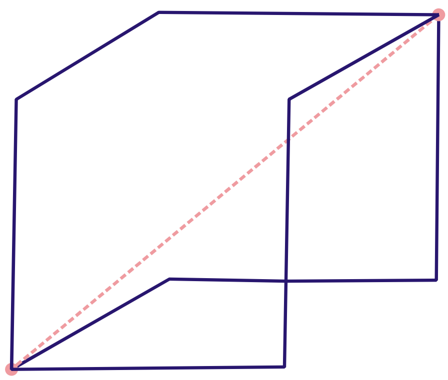
اگر مثلاً دو نقطهٔ $A$ و $B$ در فضا را به وسیلهٔ سه خم به هم وصل کنیم و دستگاه پایدار متناظر لایه‌های صابون را مورد مطالعه قرار دهیم، این موضوع روشن می‌شود. به عنوان ساده‌ترین حالت، می‌توانیم یک خم را پاره‌خط راست $AB$ بگیریم و دو خم دیگر را دو کمان دایره‌ای برابر. نتیجه در شکل (۳) نشان داده شده است.



شکل(۳). سه رویه متقاطع به زاویه ۱۲۰ درجه که بین سه قطعه سیم وصل کننده دو نقطه تشکیل می‌شوند.

اگر صفحات کمانها زاویه‌ای کمتر از ۱۲۰ درجه با هم تشکیل دهند، سه رویه به دست می‌آوریم که یکدیگر را به زوایای ۱۲۰ درجه قطع می‌کنند؛ اگر دو کمان را بچرخانیم چنانکه زاویهٔ بین آنها افزایش یابد، جواب به طور پیوسته تغییر می‌کند و به دو کمان دایره‌ای مسطح تبدیل می‌شود.

اکنون $A$ و $B$ را به وسیلهٔ سه خم پیچیده‌تر به هم وصل می‌کنیم. مثلاً می‌توانیم سه خط شکسته در نظر بگیریم که هر یک از آنها مرکب از سه ضلع یک مکعب است و دو رأس واقع بر یک قطر را به هم وصل می‌کند: سه رویهٔ قابل انطباق به دست می‌آوریم که یکدیگر را در قطر مکعب قطع می‌کنند. (این دستگاه رویه‌ها را از شکل (۱۱)، با خراب کردن لایه‌های مجاور به سه ضلع که به طرز مناسبی انتخاب شده‌اند، به دست می‌آوریم.) اگر سه خط شکستهٔ واصل $A$ و $B$ تحرک داشته باشند، می‌بینیم که خطی که محل تقاطع سه‌گانه است به صورت خمیده درمی‌آید. اما زاویه‌های ۱۲۰ درجه حفظ می‌شوند (شکل ۴).



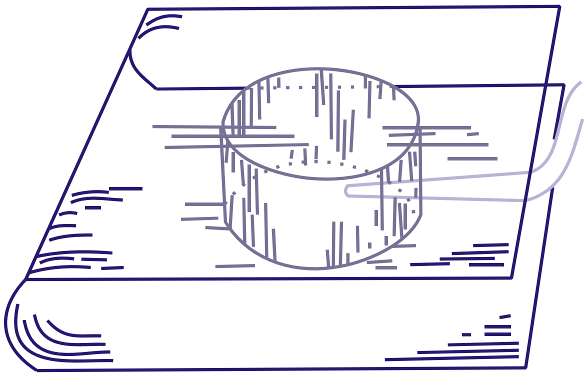
شکل (۴). سه خط شکسته که دو نقطه را به هم می‌پیوندند.

همهٔ پدیده‌هایی که در آنها سه رویهٔ مینیمال در خطهایی هم را قطع می‌کنند اساساً ماهیت یکسانی دارند و تعمیمهای مسئلهٔ مسطحهٔ وصل کردن $n$ نقطه به وسیله کوتاهترین شبکهٔ خطوط هستند.

و بالاخره، چند کلمه‌ای دربارهٔ حبابهای صابون. حبابهای کروی صابون نشان می‌دهند که در میان همه رویه‌های بسته‌ای که حجم مفروضی را دربر دارند (که با میزان هوای درون آنها مشخص می‌شود)، کره کمترین

مساحت را دارد. اگر حبابهای صابونی با حجم مفروض در نظر بگیریم که گـرایش بـه انقبـاض و تبـدیل بـه سـطح مینیمم دارند ولی شرایط خاصی آنها را محدود می‌کند، آنگاه رویه‌های حاصل کره نخواهند بود بلکه رویه‌هـایی بـا خمیدگی میانگین ثابت خواهند بود که کره و استوانهٔ مستدیر نمونه‌های خاصی از آنها هستند.

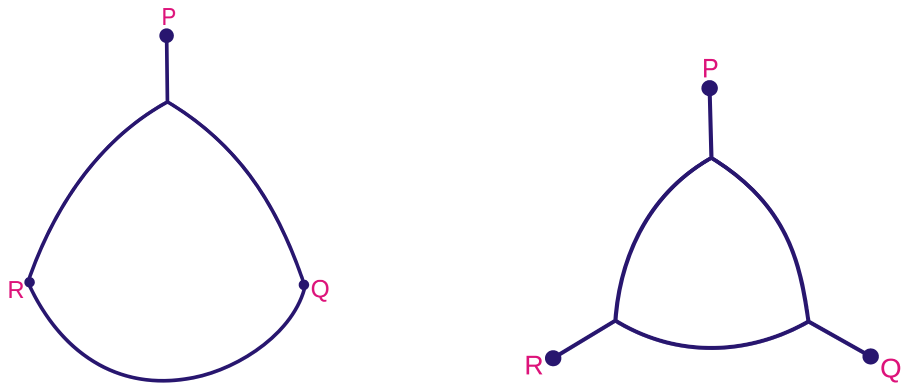
به عنوان مثال، حبابی از صابون بین دو صفحهٔ شیشه‌ای موازی که قبلاً با آب صابون خیس شده‌انـد ایجـاد می‌کنیم.



شکل (۵). نشان دادن اینکه به ازای یک مساحت مفروض، دایره کمترین محیط را دارد.

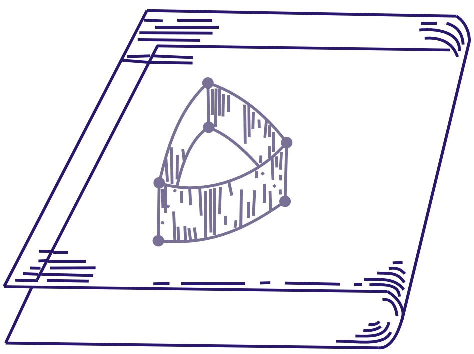
وقتی حباب با یکی از دو صفحه تماس می‌یابد ناگهان شکل نیمکره را به خود می‌گیرد و به محض برخورد با صفحهٔ دیگر ناگهان به شکل استوانهٔ مستدیر در می‌آید و به این ترتیب، ویژگی دایره را در مسئله برابر محیطی بـه طرزی دیدنی نمایش می‌دهد. این واقعیت که لایهٔ صابون خودش را به طور قائم بـا رویـهٔ محـدود کننـده تطبیـق می‌دهد، نکتهٔ اساسی در این آزمایش است.

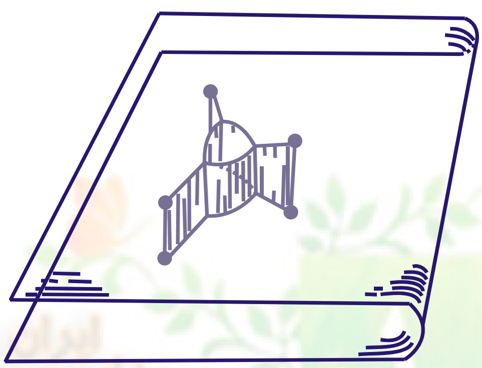
با افزودن یا کاستن میزان هوای موجود در حباب، به وسیلهٔ لوله‌ای با نوک ظریف، مـی‌تـوان رفتـار جـواب مسئلهٔ برابر محیطی را بررسی کرد. وقتی حجم هوای موجود در حباب کاهش می‌یابد، زاویه‌های مثلث مستدیر (از لحاظ نظری) کوچکتر از ۱۲۰ درجه نخواهند شد؛ ولی شکلهای ۶ و ۷ را به دست مـی‌آوریـم کـه اضـلاع آنهـا بـه پاره‌خطهای راست میل می‌کنند.




شکلهای ۶ و ۷. شکلهای برابر محیط با محدودیتهای مرزی.

دلیل ریاضی این پدیده که لایه‌های صابون نمی‌توانند کمانهای مماس بر هم را تشکیل دهند این است که به محض جدا شدن حباب از رأسها، خطهای واصل دیگر دو بار به حساب نمی‌آیند. آزمایشهای مربوطه در شکلهای ۸ و ۹ نشان داده شده‌اند.



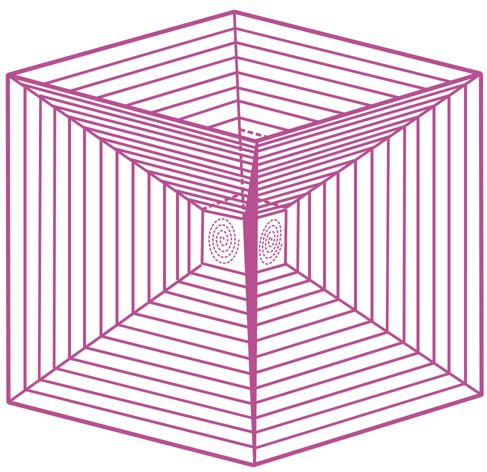


شکل (۹)

شکل (۸)

تمرین: مسئلهٔ ریاضی متناظر با این آزمایشها را بررسی کنید: می‌خواهیم مثلثی مستدیر پیدا کنیم که دربرگیرنده مساحتی مفروض باشد و به علاوه، محیطش به اضافهٔ طول سه پاره‌خط وصل کنندهٔ رأسها به نقطه‌های مفروض دارای طول مینیمم باشد.

اگر حبابی در داخل یک قالب مکعبی شکل بدمیم، چنانکه حباب از قالب بیرون بزند رویه‌هایی با خمیدگی میانگین ثابت با یک پایه درجه دوم پدید می‌آیند. اگر هوای موجود در حباب را به وسیله یک نی بمکیم، یک رشته ساختارهای زیبا مانند آنچه درشکل (۱۰) دیده می‌شود به دست می‌آوریم. پدیدهٔ پایداری و گذار بین حالتهای مختلف تعادل، سر منشأ آزمایشهایی است که از دیدگاه ریاضی بسیار روشنگرند. این آزمایشها نظریهٔ مقدارهای مانا را مجسم می‌سازد زیرا این گذارها را می‌توان طوری ترتیب داد که شامل عبور از یک حالت تعادل ناپایدار باشند که یک «حالت مانا» است.



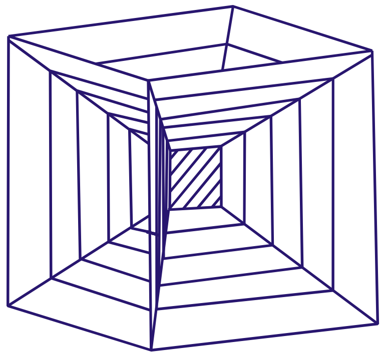
شکل (۱۰)

مثلاً ساختار مکعبی در شکل (۱۱) عدم تقارنی را نشان می‌دهد از این لحاظ که صفحه‌ای قائم در مرکز آن دوازده رویهٔ صادره از یالها را به هم وصل می‌کند.

پس باید دست‌کم دو موقعیت تعادل دیگر وجود داشته باشد، یکی با مربعی قائم در مرکز و دیگری با مربعی افقی در مرکز. در واقع، اگر از طریق یک لولهٔ باریک بر اضلاع این مربع بدمیم، می‌توانیم ساختار را به حالتی درآوریم که مربع به یک نقطه، مرکز مکعب، تقلیل یابد؛ این حالت تعادل ناپایدار بلافاصله به یکی از حالتهای پایدار دیگر که با دورانی ۹۰ درجه از حالت اولیه به دست می‌آیند، تبدیل می‌گردد.

می‌توان آزمایش مشابهی با لایهٔ صابون انجام داد که مسئلهٔ اشتاینر را برای چهار نقطه که مربعی تشکیل می‌دهند نمایش دهد.

اگر بخواهیم جوابهای مسائلی از قبیل حالات حدی مسائل برابر محیطی را بیابیم، مثلاً اگر بخواهیم شکل (۱۱) را از شکل (۱۰) به دست آوریم، باید هوای درون حباب را بمکیم. در این صورت شکل (۱۰) کاملاً متقارن خواهد شد و حالت حدی آن وقتی میزان هوای درون حباب به صفر می‌گراید، دستگاه متقارنی مرکب از ۱۲ صفحه است که یکدیگر را در مرکز قطع می‌کنند. این امر را می‌توان واقعاً مشاهده کرد. اما حالتی که در حد به دست می‌آید یک حالت تعادل پایدار نیست بلکه به یکی از حالتهای شکل (۱۱) تبدیل می‌شود. با استفاده از مایعی که تا حدی چسبنده‌تر از محلول پیشگفته باشد، کل پدیده را می‌توان خیلی آسان مشاهده کرد. این نشان می‌دهد که حتی در مسائل فیزیکی، جواب مسئله لزوماً به طور پیوسته به داده‌ها وابسته نیست زیرا در حالت حدی که حجم هوا صفر است، جوابی که از شکل (۱۱) به دست می‌آید، حد جوابی نیست که شکل (۱۰) برای حجم $\varepsilon$ می‌دهد وقتی $\varepsilon$ به صفر می‌گراید.



شکل (۱۱). قالب مکعب شکل، دستگاهی مرکب از ۱۳ رویه تقریباً مسطح پدید می‌آورد.